2026年全国硕士研究生招生考试
（数学一）
（科目代码：301）

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=e^{y+az}$ (a 是非 0 常数)确定,则(　　)

(A) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$　　(B) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}$

(C) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$　　(D) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{a}$

2. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3+(-1)^n}{4})^n x^{2n}$ 的收敛域是 (　　)

(A) $[-2,2]$　　(B) $[-1,1]$

(C) $(-2,2)$　　(D) $(-1,1)$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有定义,则 (　　)

(A)当 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,在 $(0,1)$ 单调递增时, $f(0)$ 是极小值

(B)当 $f(0)$ 是极小值时, $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,在 $(0,1)$ 单调递增

(C) 当 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的时, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增

(D) $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增时, $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的

4. 已知有界区域 Ω 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成,函数 $f(u)$ 连续,则 $\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$ (　　)

(A) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 dr\int_r^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)rdz$

(B) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}} dr\int_0^{\sqrt{4-r^2}} f(r^2+z^2)rdz$

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^2 f(r^2)r^2\sin\varphi dr$

5. 单位矩阵经过若干次互换两行得到的矩阵成为置换矩阵,设 A 为 n 阶置换矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,则(　　)

(A) A^*为置换矩阵　　　　　　　　(B) A^{-1}为置换矩阵

(C) $A^{-1}=A^*$　　　　　　　　　　(D) $A^{-1}=-A^*$

6. 设A，B为n阶矩阵，β是n维列向量，若A的列向量组可由B的列向量组表示，则（　　）

(A) 当$Ax=\beta$有解时，$Bx=\beta$有解

(B) 当$A^Tx=\beta$有解时，$B^Tx=\beta$有解

(C) 当$Bx=\beta$有解时，$Ax=\beta$有解

(D) 当$B^Tx=\beta$有解时，$A^Tx=\beta$有解

7. 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.若方程$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-1$表示的曲面为圆柱面，则（　　）

(A) $a=-4$，且$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$的规范型为$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

(B) $a=-4$，且$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$在正交变换下的标准型为$-6y_1^2-6y_2^2$

(C) $a=2$，且$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$的规范型为$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $a=2$，且$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$在正交变换下的标准型为$-6y_1^2-6y_2^2$

8. 设随机变量$X\sim N(1,2)$，令$f\left(t\right)=E\left[(X+t)^2\right]$，则$f\left(t\right)$的最小值点和最小值分别为（　　）

(A) $1,2$　　　　　　　　(B) $1,4$

(C) $-1,2$　　　　　　　　(D) $-1,4$

9. 设连续型随机变量X的分布函数为$F\left(x\right)$，随机变量Y的分布函数为$F\left(ay+b\right)$，X的数学期望为μ，方差为$\sigma^2\left(\sigma>0\right)$，若$Y$的数学期望和方差分别为0和1，则（　　）

(A) $a=\sigma$，$b=\mu$　　　　　　　　(B) $a=\sigma$，$b=-\mu$

(C) $a=\dfrac{1}{\sigma}$，$b=\mu$　　　　　　　　(D) $a=\dfrac{1}{\sigma}$，$b=-\mu$

10. 设随机变量X的概率分布为$P\left\{X=k\right\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^k}$（$k=1,2,\ldots$），则对于正整数$m$、$n$有（　　）

(A) $P\left\{X>m+n\,|\,X>m\right\}=P\left\{X>m\right\}$

(B) $P\{X>m+n|X>m\}=P\{X>n\}$

(C) $P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>m\}$

(D) $P\{X>m+n|X>m\}>P\{X>n\}$

二、填空题:11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. 设向量$\overrightarrow{v_1}=(0,x,z)$，$\overrightarrow{v_2}=(y,0,1)$，令$\overrightarrow{F}(x,y,z)=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$，则$\mathrm{div}\overrightarrow{F}=$____________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x\sin x})=$________________.

13. 设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=t+\cos t\end{cases}$ $(t\in(0,\frac{\pi}{2}))$确定，则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$_______________.

14. 设$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x=$_____________.

15. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&a&2\\0&2&a\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}a&-1&-1\\-1&2&1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$,记$m(X)$为3阶矩阵$X$的实特征值中的最大值,若$m(A)<m(B)$,则$a$的取值范围为______________.

16. 设随机变量X服从参数为1的泊松分布，随机变量Y服从参数为3的泊松分布，X与$Y-X$相互独立，则$E(XY)=$______________.

三、解答题:17～22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

求$f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$的极值.

18. (本题满分 12 分)

设$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有 3 阶连续导数，且存在可微函数$F(x,y)$使

$$dF(x,y)=\frac{f(xy)}{x^2y}dx+\frac{f''(xy)}{xy^2}dy(xy>0).$$

(1) 证明：$\frac{f''(u)}{u}-\frac{f(u)}{u}=c$，$c$为常数；

(2) 设$f(1)=1$，$f'(1)=-1$，$f''(1)=0$，求$f(u)$的表达式.

19. (本题满分 12 分)

设有向曲线 L 为椭圆 $x^2+3y^2=1$ 上沿逆时针方向从点 $A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 到点 $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的部分，计算曲线积分 $I=\int_L (e^{x^2}\sin x-2xy)dx+(6x-x^2-y\cos^4 y)dy$.

20. (本题满分 12 分)

设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$，记 $a=\int_0^1 f(x)dx$.

(1) 证明 $a>0$;

(2) 令 $F(x)=a(1-x^2)+\int_1^x f(t)dt$，证明：存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $F''(\xi)=0$.

21. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$， $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}$， $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$， $\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$， 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ ，

$G=(\alpha_1,\alpha_2)$

(1) 证明：α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

(2) 求矩阵 H 使得 $A=GH$ ，并求 A^{10} .

22. (本题满分 12 分)

假设某种元件寿命服从指数分布,其均值 θ 是未知参数,为估计 θ ,取 n 个这种元件同时做寿命实验,试验直到出现 $k(1\le k\le n)$ 个元件失效时停止.

(1) 若 $k=1$,失效元件寿命记为 T ,(i)求 T 的概率密度；(ii)确定 a ,使 $\hat{\theta}=aT$ 是 θ 的无偏估计,并求 $D(\hat{\theta})$;

(2) 已知 k 个失效元件寿命值分别为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$,且 $t_1\le t_2\le\cdots\le t_k$,似然函数为

$L(\theta)=\frac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求 θ 的最大似然估计值.