2015 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (D).

【解】 **方法一**

由$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 得$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 发散;

由$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 得$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ 发散;

由$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$ 得$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 发散,故应选(D).

方法二

$\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x-\int_0^{2}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$,

由$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(2)=1$ 且$\int_0^{2}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 为正常积分得$\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ 收敛,故应选(D).

(2)**【答案】** (B).

【解】 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}}\right]^{\frac{\sin t}{x}\cdot\frac{x^2}{t}}=\mathrm{e}^x\ (x\neq 0)$,

显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义,

因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$,所以 $x=0$ 为可去间断点,应选(B).

方法点评:本题综合考查重要极限及函数间断点的分类.

先根据重要极限的计算方法求出 $f(x)$,再求出函数的间断点,最后判断间断点所属的类型.

(3)**【答案】** (A).

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}$,

当 $\alpha>1$ 时,$f'(0)$ 存在,且 $f'(0)=0$;

$x\neq 0$ 时,$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^{\beta}}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\cdot\sin\frac{1}{x^{\beta}}$,

若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $\alpha>1,\alpha-\beta-1>0$,即 $\alpha-\beta>1$,应选(A).

(4)**【答案】** (C).

【解】 设 $f''(x)=0$ 左边的零点为 $x=a$,右边的零点为 $x=b$,

又 $x=0$ 处 $f''(x)$ 不存在.

因为 $x=a$ 的左右两侧 $f''(x)$ 都大于零,所以$(a,f(a))$不是拐点;

因为 $x=0$ 左右两侧 $f''(x)$ 异号,所以$(0,f(0))$为拐点;

因为 $x=b$ 左右两侧 $f''(x)$ 异号,所以$(b,f(b))$为拐点,

故 $y=f(x)$ 有两个拐点,应选(C).

方法点评：本题考查拐点的判别法.判断曲线的拐点时，首先找出二阶导数为零的点及二阶不可导的点，其次判断该点两侧二阶导数的符号情况，若该点两侧二阶导数异号，则曲线上对应的点为拐点.

(5)**【答案】** (D).

【解】 令$\begin{cases} x+y=u, \\ \dfrac{y}{x}=v, \end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{u}{v+1}, y=\dfrac{uv}{v+1}$,则

$$f(u,v)=\frac{u^2}{(v+1)^2}-\frac{u^2v^2}{(v+1)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(1-v)}{1+v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}=u^2\cdot\frac{-2}{(1+v)^2},$$

故$\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\dfrac{1}{2}$,应选(D).

(6)**【答案】** (B).

【解】 令$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}\left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right)$,则

$\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$,应选(B).

(7)**【答案】** (D).

【解】 因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无数个解，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$,

由 $|\boldsymbol{A}|=(a-1)(a-2)=0$ 得 $a=1,a=2$,

当 $a=1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&1&d\\1&4&1&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&3&0&d^2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&0&0&d^2-3d+2\end{array}\right),$$

因为方程组有无数个解，所以 $d=1$ 或 $d=2$;

当 $a=2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&2&d\\1&4&4&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&3&3&d^2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&0&0&d^2-3d+2\end{array}\right),$$

因为方程组有无数个解，所以 $d=1$ 或 $d=2$,应选(D).

方法点评：本题考查非齐次线性方程组的基本理论.本题非齐次线性方程组有无数个解的两个关键点为：$r(\boldsymbol{A})<3$ 及 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(8)**【答案】** (A).

【解】 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 化为标准形 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$,

因为 $\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2$ 为特征值 $2,-1,1$ 对应的特征向量，

所以在 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下二次型的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$,应选(A).

方法点评：本题考查实对称矩阵对角化及二次型理论.

二次型标准化有配方法和正交变换法，配方法化二次型为标准形时，其系数不一定为矩阵的特征值；正交变换法化二次型为标准形时，其系数一定为特征值，注意特征向量与特征值的次序要保持一致.

二、填空题

(9)【答案】 48.

【解】 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2,$$

故$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48.$

(10)【答案】 $(\ln 2)^{n-2}n(n-1)$.

【解】 方法一

$f^{(n)}(x)=C_n^0x^2\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^n+C_n^1\cdot 2x\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^{n-1}+C_n^2\cdot 2\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^{n-2}$,

则 $f^{(n)}(0)=\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot(\ln 2)^{n-2}=(\ln 2)^{n-2}n(n-1)$.

方法二

由 $f(x)=x^2 2^x=x^2e^{x\ln 2}=x^2\left[1+x\ln 2+\cdots+\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}x^{n-2}+o(x^{n-2})\right]$

$=x^2+x^3\ln 2+\cdots+\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!}x^n+o(x^n)]$ 得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\ln^{n-2}2}{(n-2)!},$$

故 $f^{(n)}(0)=n(n-1)\ln^{n-2}2$.

方法点评：本题考查高阶导数的计算. 高阶导数的计算方法通常有：

方法一 归纳法

如：$y=e^x\sin x$，

由 $y'=e^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

$$y''=\sqrt{2}e^x\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

由归纳法得 $y^{(n)}=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

需要记住的结论：$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!\,a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

方法二 公式法

即利用公式：$(uv)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^nuv^{(n)}$.

(11)**【答案】** 2.

【解】 由 $\varphi(x)=x\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$ 得 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t+2x^2f(x^2)$,

再由 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$ 得$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1$,于是 $5=1+2f(1)$,解得 $f(1)=2$.

(12)**【答案】** $\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^x$.

【解】 特征方程为$\lambda^2+\lambda-2=0$,特征根为$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$,

则原方程通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$,

由 $y(0)=3,y'(0)=0$ 得$\begin{cases}C_1+C_2=3,\\-2C_1+C_2=0,\end{cases}$解得 $C_1=1,C_2=2$,

故 $y=\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^x$.

方法点评:本题综合考查二阶齐次线性微分方程与函数极值.
先求出微分方程的通解,再由初始条件 $y(0)=3,y'(0)=0$ 求出待定常数,从而求出特解.

(13)**【答案】** $-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

【解】 $x=0,y=0$ 代入 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 得 $z=0$.

$\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot\left(1+3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot\left(2+3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases}$$

将 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式得$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$,

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

(14)**【答案】** 21.

【解】 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为:$2^2-2+1=3,(-2)^2-(-2)+1=7,1^2-1+1=1$,

故$|\boldsymbol{B}|=21$.

三、解答题

(15)**【解】** **方法一** 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3),\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=x+ax-\frac{ax^2}{2}+\frac{ax^3}{3}+bx^2+o(x^3)\\&=(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3),\end{aligned}$$

因为 $f(x)\sim g(x)$,

所以 $1+a=0,b-\dfrac{a}{2}=0,\dfrac{a}{3}=k$,解得 $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$.

方法二 由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}\text{，得 } a=-1,$$

再由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}\text{，得 } b=-\frac{1}{2},$$

再由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x}{6kx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x}{6kx}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{6k}=-\frac{1}{3k}\text{，得 } k=-\frac{1}{3}.$$

(16)**【解】** 由题意，D 由曲线 $y=A\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域，

区域 D 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 V_1，则

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\mathrm{d}x=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}A^2;$$

D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为 V_2，则

$$V_2=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=2\pi A,$$

由 $V_1=V_2$ 得 $A=\dfrac{8}{\pi}$.

(17)**【解】** 由 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，得 $f'_x(x,y)=(y+1)^2e^x+\varphi(x)$，

则 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x+C$.

由 $f(0,y)=y^2+2y$，得 $(y+1)^2+C=y^2+2y$，

解得 $C=-1$，即 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x-1$，

又由 $f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，得 $e^x+\varphi(x)=(x+1)e^x$，解得 $\varphi(x)=xe^x$，

故 $f(x,y)=(y+1)^2e^x+\int_0^x xe^x\mathrm{d}x-1=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x$.

由 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=(y+1)^2e^x+xe^x=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)e^x=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1.\end{cases}$

由 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(y+1)^2e^x+(x+1)e^x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2(y+1)e^x$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^x$ 得

$A=1,B=0,C=2$，

因为 $AC-B^2=2>0$ 且 $A>0$，所以 $\begin{cases}x=0,\\y=-1\end{cases}$ 为极小值点，极小值为 $f(0,-1)=-1$.

(18)**【解】** 由$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ y=x^2,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\ y=1,\end{cases}\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$

令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{2-x^2}\}$，

因为区域 D 关于 y 轴对称，所以$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

故 $I=\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x-2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t\cdot\sqrt{2}\cos t\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,\mathrm{d}(2t)-\frac{2}{5}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(19)**【解】** 由 $f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=(2x-1)\sqrt{1+x^2}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$，

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，

则 $x=\dfrac{1}{2}$ 为极小值点，极小值 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t-\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t<0$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>0$，

所以 $f(x)$ 有两个零点，一个在$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$之间，另一个为 $x=1$.

方法点评：本题考查函数零点的讨论.

讨论函数零点个数或方程的根的个数一般分如下三个步骤：

第一步，求出函数的定义域；

第二步，求出函数的驻点及不可导点，从而求出函数的极值及单调性；

第三步，求函数在极值点两侧的变化趋势，根据函数的图像求出函数零点个数.

(20)**【解】** 设 t 时刻物体的温度为 $T(t)$，由题意得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k[T(t)-20](k>0),$$

整理得$\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+kT=20k$，解得 $T(t)=\left(\int 20k\,\mathrm{e}^{\int k\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-\int k\mathrm{d}t}=C\mathrm{e}^{-kt}+20$.

由 $T(0)=120,T(30)=30$ 得$\begin{cases}C+20=120,\\ C\mathrm{e}^{-30k}t+20=30,\end{cases}$解得 $C=100,k=\dfrac{\ln 10}{30}$，

即 $T(t)=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$，当 $T=21$ 时，由 $21=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$ 得 $t=60$，
故还需要冷却 30 分钟，物体的温度才可降到 21℃.

(21)【证明】 切线方程为 $y=f'(b)(x-b)+f(b)$,

切线与 x 轴的交点为$\left(b-\dfrac{f(b)}{f'(b)},0\right)$,即 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$.

因为 $f'(x)>0$,所以 $f(b)>f(a)=0$,故 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

现证明 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}>a$,

$b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}>a$ 等价于 $bf'(b)-f(b)>af'(b)$,

令 $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)-af'(x)=(x-a)f'(x)-f(x)$,

因为 $f(a)=0$,

$$\begin{aligned}\text{所以 } \varphi(x)&=(x-a)f'(x)-[f(x)-f(a)]\\&=(x-a)f'(x)-(x-a)f'(\xi)\\&=(x-a)[f'(x)-f'(\xi)](a<\xi<x),\end{aligned}$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调增加,

从而 $f'(x)>f'(\xi)$,于是 $\varphi(x)>0(a<x<b)$,

取 $x=b$,则 $bf'(b)-f(b)>af'(b)$,即 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}>a$,

故 $a<b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

(22)【解】 (Ⅰ)由 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$ 得 $|\boldsymbol{A}|=0$,

由 $|\boldsymbol{A}|=a^3=0$ 得 $a=0$,故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(Ⅱ)由 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,

进一步整理得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}$.

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix},$$

$$\text{由}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\;\vdots\;\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&-1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$;

$$\text{再由}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\;\vdots\;\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\-1&0&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&0&0&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&0&-1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{array}\right)$$

得$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$.

方法点评:本题考查未知矩阵的求法.

求未知矩阵一般分如下情形:

情形一:将矩阵关系式化简为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$;

情形二:将矩阵关系式化简为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 不可逆或 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵,此时利用方程组求解的方式求出未知矩阵 $\boldsymbol{X}$;

情形三:用特征值与特征向量及矩阵对角化的方法求未知矩阵.

(23)**【解】** (Ⅰ)因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以$\begin{cases}\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B},\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

从而$\begin{cases}a+3=b+2,\\2a-3=b,\end{cases}$解得 $a=4,b=5$.

(Ⅱ)因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\0&\lambda-5&0\\0&-3&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$,得

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$.

将 $\lambda=1$ 代入$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$;

将 $\lambda=5$ 代入$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即$(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&2&3\\5&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&4&4\\0&8&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=5$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.