2013年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x),|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$（　）

（A）比 x 高阶的无穷小量.　　（B）比 x 低阶的无穷小量.

（C）与 x 同阶但不等价无穷小量.　　（D）与 x 等价无穷小量.

2．已知函数 $y=f(x)$ 是由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$（　）

（A）2　（B）1　（C）-1　（D）-2

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi,\\ 2, & \pi\le x\le 2\pi,\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 则（　）

（A）$x=\pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点.　　（B）$x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

（C）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.　　（D）$F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}},1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x},x\ge e\end{cases}$，且反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则（　）

（A）$\alpha<-2$　（B）$a>2$　（C）$-2<a<0$　（D）$0<\alpha<2$

5．设 $z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）

（A）$2yf'(xy)$　（B）$-2yf'(xy)$　（C）$\dfrac{2}{x}f(xy)$　（D）$-\dfrac{2}{x}f(xy)$

6．设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 的第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=1,2,3,4)$，则（　）

（A）$I_1>0$　（B）$I_2>0$　（C）$I_3>0$　（D）$I_4>0$

7．设Ａ，Ｂ，Ｃ均为 n 阶矩阵，若ＡＢ＝Ｃ，且Ｂ可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.　　（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.　　（D）矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

8．矩阵 $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是

（A）$a=0,b=2$　　（B）$a=0$，b 为任意常数

（C）$a=2,b=0$　　（D）$a=2$，b 为任意常数

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

10．设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^{t}}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\dfrac{dx}{dy}|_{y=0}=$______.

11．设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta\left(-\dfrac{\pi}{6}\le\theta\le\dfrac{\pi}{6}\right)$，则 L 所围成的平面图形的面积为____________.

12．曲线上 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^{2}}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为_____________.

13．已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x},y_2=e^{x}-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程三个解，则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$______________.

14．设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0\ \ (i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ ____________.

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos\cdot x\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^{n} 是等价无穷小，求常数 a 与 n 的值.

16．（本题满分 10 分）

设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a\ (a>0)$ 及 x 轴所转成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所形成的立体的体积，若 $10V_x=V_y$，求 a 的值.

17．（本题满分 10 分）

设平面区域 D 是由直线 $x=3y,y=3x,x+y=8$ 所围成，计算 $\iint\limits_{D}x^{2}dxdy$.

18．（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

19．（本题满分 10 分）

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geq 0,y\geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

20．（本题满分 11）

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$

⑴求 $f(x)$ 的最小值；

⑵设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

21．（本题满分 11）

设曲线 L 的方程为 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x(1\leq x\leq e)$.

（1）求 L 的弧长.

（2）设 D 是由曲线 L，直线 $x=1,x=e$ 及 x 轴所围成的平面图形，求 D 的形心的横坐标.

22．本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，问当 a,b 为何值时，存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$，并求出所有矩阵 C.

23（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$. 记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$.

（1）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（2）若 α,β 正交且为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.