

## 2013 年数学(二) 真题解析

### 一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解】 由  $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$ ,  $x \sin \alpha(x) \sim x\alpha(x)$ , 得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ ,

故  $\alpha(x)$  为  $x$  的同阶而非等价的无穷小, 应选(C).

(2) 【答案】 (A).

【解】 将  $x=0$  代入  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  中, 得  $y=1$ .

$\cos(xy) + \ln y - x = 1$  两边对  $x$  求导, 得  $-\sin(xy) \cdot \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} - 1 = 0$ ,

将  $x=0, y=1$  代入得  $f'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1$ ,

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{2}{n}\right) - f(0)}{\frac{2}{n}} = 2f'(0) = 2$ , 应选(A).

**方法点评:** 本题是隐函数的导数与导数定义结合问题. 先求出隐函数的导数, 再根据导数的定义求出极限值.

(3) 【答案】 (C).

【解】 因为  $x = \pi$  是  $f(x)$  的跳跃间断点, 所以  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  在  $x = \pi$  处连续.

由  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 - \cos x - 2}{x - \pi} = -\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x + 1}{x - \pi} = -\lim_{x \rightarrow \pi^-} (-\sin x) = 0$ ,

得  $F'_-(\pi) = 0$ ;

由  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{F(x) - F(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\int_0^\pi f(t) dt + \int_\pi^x f(t) dt - \int_0^\pi f(t) dt}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\int_\pi^x 2 dt}{x - \pi} = 2$ ,

得  $F'_+(\pi) = 2$ .

因为  $F'_-(\pi) \neq F'_+(\pi)$ , 所以  $F(x)$  在  $x = \pi$  处不可导, 应选(C).

(4) 【答案】 (D).

【解】 
$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^e f(x) dx + \int_e^{+\infty} f(x) dx,$$

对反常积分  $\int_1^e f(x) dx$ ,  $x=1$  为瑕点, 且  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} = 1$ ,

因为  $\int_1^e f(x) dx$  收敛, 所以  $\alpha - 1 < 1$ , 即  $\alpha < 2$ ;

$$\int_e^{+\infty} f(x) dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x} dx \stackrel{t = \ln x}{=} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt,$$

由  $\int_e^{+\infty} f(x) dx$  即  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt$  收敛得  $\alpha + 1 > 1$ , 即  $\alpha > 0$ , 于是  $0 < \alpha < 2$ , 应选(D).

(5) 【答案】 (A).

【解】 方法一 由  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy)$ ,

得  $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot \left[ -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy) \right] + \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) = 2yf'(xy)$ ,

应选(A).

方法二 将  $z = \frac{y}{x}f(xy)$  两边求微分,得

$$\begin{aligned} dz &= d\left(\frac{y}{x}\right)f(xy) + \frac{y}{x}df(xy) \\ &= \frac{x dy - y dx}{x^2}f(xy) + \frac{y}{x}f'(xy)(y dx + x dy) \\ &= \left[ -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy) \right] dx + \left[ \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy) \right] dy, \end{aligned}$$

于是  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}f(xy) + \frac{y^2}{x}f'(xy)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}f(xy) + yf'(xy)$ ,

故  $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(xy)$ , 应选(A).

(6) 【答案】 (B).

【解】 因为区域  $D_1, D_3$  关于直线  $y=x$  对称,

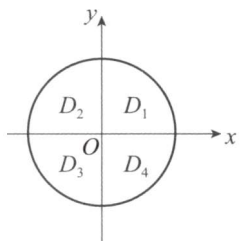
所以  $I_1 = \iint_{D_1} (y-x) dx dy = \iint_{D_1} (x-y) dx dy$ ,

$I_3 = \iint_{D_3} (y-x) dx dy = \iint_{D_3} (x-y) dx dy$ ,

于是  $I_1 = I_3 = 0$ ;

$I_2 = \iint_{D_2} (y-x) dx dy = \iint_{D_2} [y + (-x)] dx dy > 0$  ( $\because y + (-x) > 0$ ),

$I_4 = \iint_{D_4} (y-x) dx dy = \iint_{D_4} [y + (-x)] dx dy < 0$  ( $\because y + (-x) < 0$ ), 应选(B).



—(6) 题图

**方法点评:** 本题考查二重积分的对称性质.

二重积分有如下几个对称性质:

(1) 若  $D$  关于  $y$  轴对称, 其中  $D_1$  是  $D$  位于  $y$  轴右侧的部分, 则

当  $f(-x, y) = -f(x, y)$  时,  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ ;

当  $f(-x, y) = f(x, y)$  时,  $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ .

(2) 若  $D$  关于  $x$  轴对称, 其中  $D_1$  是  $D$  位于  $x$  轴上侧的部分, 则

当  $f(x, -y) = -f(x, y)$  时,  $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$ ;

当  $f(x, -y) = f(x, y)$  时,  $\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy$ .

(3) 若  $D$  关于直线  $y = x$  对称, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(y, x) dx dy$ .

(7) 【答案】 (B).

【解】 令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, C = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n),$

由  $AB = C$  得

$$\begin{cases} \gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \cdots + b_{n1}\alpha_n, \\ \gamma_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{n2}\alpha_n, \\ \vdots \\ \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + b_{2n}\alpha_2 + \cdots + b_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

即矩阵  $C$  的列向量组可由矩阵  $A$  的列向量组线性表示;

因为  $B$  可逆, 所以由  $AB = C$  得  $CB^{-1} = A$ , 同理, 可得矩阵  $A$  的列向量组可由矩阵  $C$  的列向量组线性表示, 即  $A, C$  列向量组等价, 应选(B).

(8) 【答案】 (B).

【解】 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

因为  $A, B$  都是实对称矩阵, 所以  $A \sim B$  的充分必要条件是  $A, B$  特征值相同.

而  $B$  的特征值为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = b, \lambda_3 = 0$ .

$$|2E - A| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ -1 & -a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ 0 & -2a & 0 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -a & -a \end{vmatrix} = -4a^2,$$

所以  $a = 0$ , 即  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 且  $A$  的特征值也为  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = b, \lambda_3 = 0$ ,

故当  $a = 0, b$  为任意常数时,  $A \sim B$ , 应选(B).

## 二、填空题

(9) 【答案】  $e^{\frac{1}{2}}$ .

【解】  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left[ 1 + \left[ 1 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right] \right]^{\frac{1}{1 - \frac{\ln(1+x)}{x}}} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = e^{\frac{1}{2}}.$

(10) 【答案】  $\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$ .

【解】 将  $y=0$  代入  $y=f(x)$  中, 得  $x=-1$ .

由函数与反函数导数的关系得  $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{f'(-1)}$ ,

而  $f'(x) = \sqrt{1-e^x}$ , 故  $\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$ .

(11) 【答案】  $\frac{\pi}{12}$ .

【解】 由极坐标系下面积的定积分公式得

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d(3\theta) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{3} I_2 = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

(12) 【答案】  $y+x-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}=0$ .

【解】 当  $t=1$  时, 曲线上点的坐标为  $M_0\left(\frac{\pi}{4}, \ln\sqrt{2}\right)$ .

由  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t}{1+t^2} = t$ , 得  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1$ ,

则法线的斜率为  $k=-1$ , 故所求的法线方程为

$$y - \ln\sqrt{2} = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ 即 } x + y - \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} = 0.$$

(13) 【答案】  $-e^x + e^{3x} - xe^{2x}$ .

【解】 设二阶常系数非齐次线性微分方程为  $y'' + py' + qy = f(x)$ .

由线性微分方程解的结构, 得  $y_1 - y_3 = e^{3x}$ ,  $y_2 - y_3 = e^x$  为方程  $y'' + py' + qy = 0$  的两个解, 则该方程的特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ , 故方程  $y'' + py' + qy = f(x)$  的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - x e^{2x},$$

由  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , 得  $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + 3C_2 - 1 = 1, \end{cases}$  解得  $C_1 = -1, C_2 = 1$ ,

故满足初始条件的特解为  $y = -e^x + e^{3x} - x e^{2x}$ .

(14) 【答案】  $-1$ .

【解】 由  $A_{ij} = -a_{ij}$ , 得  $A^T = -A^*$ , 两边取行列式得  $|A| = (-1)^3 |A^*| = -|A|^2$ , 于是  $|A| = 0$  或  $|A| = -1$ .

因为  $A$  为非零矩阵, 所以  $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$  不全为零, 不妨设  $a_{11} \neq 0$ ,

由  $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = -(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2) < 0$ , 得  $|A| = -1$ .

**方法点评:** 在行列式计算中, 若出现  $A_{ij}$  或者  $A^*$  时, 一般使用如下两个性质:

(1)  $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A| (i = 1, 2, \cdots, n)$ ;

(2)  $|A^*| = |A|^{n-1}$ .

### 三、解答题

(15) 【解】 方法一

$$\begin{aligned} & \text{由 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x - \cos x \cos 2x}{x^2} + \frac{\cos x \cos 2x - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} + \cos x \frac{1 - \cos 2x}{x^2} + \cos x \cos 2x \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = 7, \end{aligned}$$

得  $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \sim 7x^2$ , 故  $n=2, a=7$ .

方法二 由麦克劳林公式得

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \cos 2x = 1 - \frac{4}{2!}x^2 + o(x^2), \cos 3x = 1 - \frac{9}{2!}x^2 + o(x^2),$$

$$\text{从而 } \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 - \frac{1+4+9}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 - 7x^2 + o(x^2),$$

于是  $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x = 7x^2 + o(x^2) \sim 7x^2$  ( $x \rightarrow 0$  时), 故  $n=2, a=7$ .

**方法点评:** 本题考查无穷小的阶与等价无穷小.

涉及余弦函数的无穷小有一个等价无穷小的公式:  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$  ( $x \rightarrow 0$  时).

事实上这个公式可以推广成更广泛的公式:  $1 - \cos^a x \sim \frac{a}{2}x^2$  ( $x \rightarrow 0$  时).

**【例 1】** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - \ln(1+x)}$ .

**【解】**  $1 - \sqrt{\cos x} = 1 - \cos^{\frac{1}{2}} x \sim \frac{1}{4}x^2$ ,

由  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , 得  $x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$ ,

于是  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x - \ln(1+x)} = \frac{1}{2}$ .

**【例 2】** 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x} \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt{\cos 3x}}{x \arcsin x}$ .

**【解】**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x} \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt{\cos 3x}}{x \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x} \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt{\cos 3x}}{x^2}$

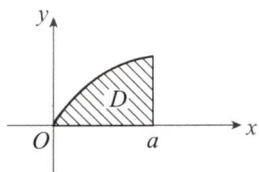
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} + \sqrt{\cos x} \cdot \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \sqrt{\cos x} \sqrt{\cos 2x} \cdot \frac{1 - \sqrt{\cos 3x}}{x^2} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 3x}}{x^2}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{2}.$$

(16) 【解】 由旋转体的体积公式得

$$V_x = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3\pi}{5} a^{\frac{5}{3}},$$

$$V_y = 2\pi \int_0^a xy dx = 2\pi \int_0^a x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{6\pi}{7} a^{\frac{7}{3}},$$

由  $V_y = 10V_x$  得  $a = 7\sqrt{7}$ .



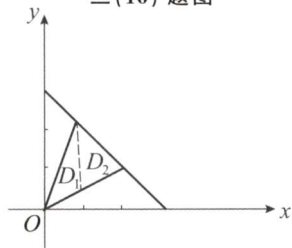
三(16)题图

(17) 【解】 由  $\begin{cases} y = 3x, \\ x + y = 8, \end{cases}$  得  $\begin{cases} x = 2, \\ y = 6. \end{cases}$  由  $\begin{cases} x = 3y, \\ x + y = 8, \end{cases}$  得  $\begin{cases} x = 6, \\ y = 2. \end{cases}$

$$\text{令 } D_1 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{3} \leq y \leq 3x \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, \frac{x}{3} \leq y \leq 8 - x \right\},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } I &= \iint_D x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{3x} dy + \int_2^6 x^2 dx \int_{\frac{x}{3}}^{8-x} dy \\ &= \frac{8}{3} \int_0^2 x^3 dx + \int_2^6 x^2 \left( 8 - \frac{4x}{3} \right) dx = \frac{416}{3}. \end{aligned}$$



三(17)题图

(18) 【证明】 (I) 方法一 因为  $f(x)$  为奇函数, 所以  $f(-x) = -f(x)$ , 于是  $f(0) = 0$ .

由拉格朗日中值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$ .

方法二 因为  $f(x)$  为奇函数, 所以  $f(-x) = -f(x)$ , 于是  $f(0) = 0$ .

令  $\varphi(x) = f(x) - x$ , 则  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = f(1) - 1 = 0$ .

由罗尔定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $\varphi'(\xi) = 0$ , 而  $\varphi'(x) = f'(x) - 1$ , 于是  $f'(\xi) = 1$ .

(II) 因为  $f'(x)$  为偶函数, 所以  $f'(-\xi) = 1$ . 令  $h(x) = [f'(x) - 1]e^x$ ,  $h(-\xi) = h(\xi) = 0$ .

由罗尔定理, 存在  $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$ , 使得  $h'(\eta) = 0$ .

而  $h'(x) = f''(x)e^x + [f'(x) - 1]e^x = [f''(x) + f'(x) - 1]e^x$  且  $e^x \neq 0$ ,

所以  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ .

**方法点评:** 本题考查中值定理. 中值定理部分最难以掌握的部分就是辅助函数的构造, 事实上构造辅助函数有一整套的方法, 就本题辅助函数构造作如下补充:

(1) 若结论为  $f'(\xi) + kf(\xi) = 0$ , 辅助函数为  $F(x) = e^{kx}f(x)$ ;

(2) 若结论为  $\xi f'(\xi) + kf(\xi) = 0$ , 辅助函数为  $F(x) = x^k f(x)$ ;

(3) 本题第二问, 先将  $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$  改写为  $f''(x) + f'(x) - 1 = 0$ , 整理得  $[f'(x) - 1]' + [f'(x) - 1] = 0$ , 显然辅助函数为  $F(x) = e^x [f'(x) - 1]$ .

(19) 【解】 设  $M(x, y)$  为曲线上任一点, 该点到原点的距离为  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

令  $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} F'_x = 2x + \lambda(3x^2 - y) = 0, \\ F'_y = 2y + \lambda(3y^2 - x) = 0, \\ F'_\lambda = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

又  $(1, 0)$  与  $(0, 1)$  为曲线的两个端点, 由  $d(1, 1) = \sqrt{2}$ ,  $d(1, 0) = d(0, 1) = 1$ , 得曲线上的点到坐标原点的最大距离为  $\sqrt{2}$ , 最短距离为 1.

(20) (I)【解】 由  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$  得  $x = 1$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$ ,

因为  $f''(1) = 1 > 0$ , 所以  $x = 1$  为  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  的最小值点, 最小值为  $f(1) = 1$ .

(II)【证明】

由  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$  及  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 得  $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n+1}}$ , 即  $x_n < x_{n+1}$ , 故数列  $\{x_n\}$  单调增加;

由  $\ln x_n \leq \ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ , 得  $x_n < e$ , 即数列  $\{x_n\}$  单调增加有上界, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$  两边求极限得  $\ln a + \frac{1}{A} \leq 1$ ,

又  $\ln x_n + \frac{1}{x_n} \geq 1$ , 得  $\ln a + \frac{1}{A} \geq 1$ , 即  $\ln a + \frac{1}{A} = 1$ , 解得  $A = 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

(21)【解】 (I)  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x}$ ,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} dx = \frac{x^2 + 1}{2x} dx,$$

于是曲线的弧长为  $s = \int_1^e ds = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{e^2 - 1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

(II) 区域  $D$  的形心横坐标为  $\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}$ ,

$$\begin{aligned} \text{而 } \iint_D dx dy &= \int_1^e dx \int_0^{\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x} dy = \int_1^e \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x\right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_1^e (x^2 - 2 \ln x) dx = \frac{e^3 - 7}{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_1^e x dx \int_0^{\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x} dy = \int_1^e \left(\frac{x^3}{4} - \frac{1}{2} x \ln x\right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_1^e (x^3 - 2x \ln x) dx = \frac{e^4 - 2e^2 - 3}{16}, \end{aligned}$$

于是  $\bar{x} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}$ .

(22)【解】 令  $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ,

$$\text{则 } AC = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ax_3 & x_2 + ax_4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & ax_1 \\ x_3 + x_4 & ax_3 \end{pmatrix},$$

$$AC - CA = \begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{由 } \mathbf{AC} - \mathbf{CA} = \mathbf{B}, \text{ 得 } \begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_2 - ax_3 = b. \end{cases}$$

设以上方程组对应的系数矩阵为  $\mathbf{D}$ , 则

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{D}} &= \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{array} \right). \end{aligned}$$

当  $a = -1, b = 0$  时, 线性方程组  $\mathbf{AC} - \mathbf{CA} = \mathbf{B}$  有解,

$$\text{由 } \overline{\mathbf{D}} \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ 得 } \mathbf{AC} - \mathbf{CA} = \mathbf{B} \text{ 的通解为}$$

$$\mathbf{X} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 \\ -k_1 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}),$$

$$\text{故 } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

(23) 【证明】 (I) 令  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , 则

$$\begin{aligned} f &= 2\mathbf{X}^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1, a_2, a_3)\mathbf{X} + \mathbf{X}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3)\mathbf{X} \\ &= \mathbf{X}^T (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\mathbf{X} + \mathbf{X}^T (\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\mathbf{X} = \mathbf{X}^T (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\mathbf{X}, \end{aligned}$$

则二次型  $f$  的矩阵为  $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ .

(II) 令  $\mathbf{A} = 2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ , 由  $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{\alpha}$ ,

得  $\boldsymbol{\alpha}$  为  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda_1 = 2$  的特征向量;

由  $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = (2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$ , 得  $\boldsymbol{\beta}$  为  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda_2 = 1$  的特征向量;

因为  $r(\mathbf{A}) = r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) \leq r(2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T) + r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T) = r(\boldsymbol{\alpha}) + r(\boldsymbol{\beta}) = 2 < 3$ ,

所以  $\lambda_3 = 0$  为  $\mathbf{A}$  的特征值, 故二次型  $f$  在正交变换下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2$ .