2011年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【解】 方法一　麦克劳林公式法

由 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$，　$\sin 3x = 3x - \dfrac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)$，

得 $3\sin x - \sin 3x = \left(\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3) \sim 4x^3$，

故 $c=4, k=3$，应选(C).

方法二　待定次数法

$$由\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x\to0}\frac{3\sin x - \sin 3x}{x^k} = \lim_{x\to0}\frac{3\cos x - 3\cos 3x}{kx^{k-1}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-3\sin x + 9\sin 3x}{k(k-1)x^{k-2}} = \lim_{x\to0}\frac{-3\cos x + 27\cos 3x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}},$$

得 $k=3$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3} = 4$，故 $k=3, c=4$，应选(C).

(2)**【答案】** (B).

【解】 $$\lim_{x\to0}\frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x} - 2\,\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$
$$= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0),$$

应选(B).

方法点评： 本题考查导数的定义，本题虽然是 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内没有可导的条件，所以若采用洛必达法则求极限方法将是错误的.

(3)**【答案】** (C).

【解】 $f(x) = \ln|x-1| + \ln|x-2| + \ln|x-3|$，

令 $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{3x^2 - 12x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 0$，

得 $x = 2 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即函数 $f(x)$ 有两个驻点，应选(C).

方法点评： 本题考查函数求导数及驻点的定义，很多考生对含绝对值的函数求导数不熟悉，一般情况下，先将其写成分段函数，再分别求导数，但本题不需要这样讨论，事实上 $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

(4)**【答案】** (C).

【解】 $y'' - \lambda^2 y = 0$ 的特征根为 $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = -\lambda$，

$y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x}$ 的特解形式为 $axe^{\lambda x}$，$y'' - \lambda^2 y = e^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $bxe^{-\lambda x}$，

则 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$ 的特解形式为 $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$，应选(C).

方法点评：本题考查二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 当 $f(x)=P_n(x)e^{kx}$ 时的特解的形式.

情形一：若 k 非特征根，则 $y_0(x)=(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{kx}$；

情形二：若 k 与其中一个特征根相等，则 $y_0(x)=x(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{kx}$；

情形三：若 k 与两个特征根都相等，则 $y_0(x)=x^2(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)e^{kx}$.

(5)**【答案】** (A).

【解】 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y),\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y),\end{cases}$

显然 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$，即 $(0,0)$ 为函数 $z=f(x)g(y)$ 的驻点.

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=f''(0)g(0),\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=0,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=f(0)g''(0),$$

$AC-B^2=f''(0)g(0)f(0)g''(0)$，则 $(0,0)$ 为 $z=f(x)g(y)$ 的极小值点的一个充分条件为 $f''(0)<0,g''(0)>0$，应选(A).

(6)**【答案】** (B).

【解】 当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，由 $\sin x<\cos x<\cot x$ 得 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$，

于是 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，即 $I<K<J$，应选(B).

方法点评：(1) 积分限相同的几个定积分比较大小，一般比较其被积函数即可.

(2) 本题 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$ 都是反常积分，$x=0$ 为其瑕点，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{\sin x}dx,$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\sin x\ln\sin x\xlongequal{t=\sin x}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln t}{\frac{1}{t}}=0$，又 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x\cos x}{\sin x}dx$ 为正常积分，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$ 收敛.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，因为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$ 为正常积分，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$ 收敛，故本题即按正常积分比较大小的方法比较.

(7)**【答案】** (D).

【解】 由题意得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}$，

再由 $\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$，得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$，应选(D).

方法点评：矩阵的初等变换分为初等行变换和初等列变换. 其中初等行(列)变换包含：

(1) 对调两行(列)；

(2) 某行(列)的非零常数倍；

(3) 某行(列)的倍数加到另一行(列).

初等矩阵有三种，即

(1)$\boldsymbol{E}_{ij}$—— 对调 $\boldsymbol{E}$ 的 i,j 行(列)；

(2)$\boldsymbol{E}_i(c)(c\neq 0)$——$\boldsymbol{E}$ 的 i 行(列)c 倍；

(3)$\boldsymbol{E}_{ij}(k)$—— $\boldsymbol{E}$ 的 j 行 k 倍加到 i 行或 $\boldsymbol{E}$ 的 i 列 k 倍加到 j 列.

矩阵的左边乘三个初等矩阵相当于进行三种初等行变换，矩阵的右边乘三个初等矩阵相当于进行三种初等列变换，另外 $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}$，$\boldsymbol{E}_i^{-1}(c)=\boldsymbol{E}_i\left(\dfrac{1}{c}\right)$，$\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k)$.

(8)【答案】 (D).

【解】 因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含一个线性无关的解向量，所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，

于是 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 3 个线性无关的解向量，

排除选项(A)，(B)；由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一组解，

由$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_3$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，

故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，应选(D).

方法点评：本题综合考查了齐次线性方程组系数矩阵的秩与基础解系的关系及向量组相关性概念，需要熟练掌握如下重要知识点：

(1)$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

(2) 对齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，其基础解系所含的线性无关解向量的个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$.

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(4) 向量组中，若一个向量可由其余向量线性表示，则该向量组一定线性相关.

二、填空题

(9)【答案】 $\sqrt{2}$.

【解】 方法一 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}}\right]^{\frac{2^x-1}{2x}}$

$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 2}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

方法二 由$\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2^x-1}{2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{2^x-1}{2}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}2^x\ln 2=\ln\sqrt{2}$,

得$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$.

(10)**【答案】** $e^{-x}\sin x$.

【解】 **方法一** 由 $y'+y=e^{-x}\cos x$,得

$$y=\left(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C\right)e^{-\int dx}=(\sin x+C)e^{-x}=Ce^{-x}+e^{-x}\sin x,$$

因为 $y(0)=0$,所以 $C=0$,于是 $y=e^{-x}\sin x$.

方法二 $y'+y=0$ 的通解为 $y=Ce^{-\int dx}=Ce^{-x}$.

令原方程的通解为 $y=C(x)e^{-x}$,代入原方程得 $C'(x)e^{-x}=e^{-x}\cos x$,

解得 $C(x)=\sin x+C$,即原方程的通解为 $y=(\sin x+C)e^{-x}$,

由 $y(0)=0$ 得 $C=0$,故原方程满足初始条件的特解为 $y=e^{-x}\sin x$.

(11)**【答案】** $\ln(1+\sqrt{2})$.

【解】 由 $ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\sec x\,dx$,得

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx=\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2}).$$

方法点评:本题考查变积分限函数求导、弧微分的公式、定积分的计算.

需要熟练掌握曲线的弧长计算公式:

(1) 若 $L: y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$, $s=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$;

(2) 若 $L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,则 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$, $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$;

(3) 若 $L: r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$,则 $ds=\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,d\theta$, $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)}\,d\theta$.

(12)**【答案】** $\dfrac{1}{\lambda}$.

【解】 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}d(\lambda x)$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{\lambda}\Gamma(2)=\frac{1}{\lambda}.$$

方法点评:积分区间无限的反常积分的计算,一般采用分部积分法,但很多情况下若采用 Γ 函数的定义和性质计算将减少运算量,提高结果的可靠性.

Γ 函数的定义为:$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

Γ 函数的性质为:$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. 如:

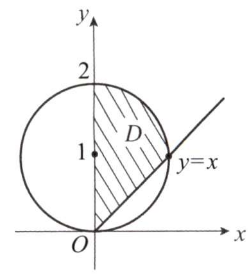
【例 1】 计算$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}dx$.

【解】 $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}dx=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

【例 2】 计算$\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$.

【解】 $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx\overset{x^2=t}{=\!=\!=}\int_0^{+\infty}te^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

(13)【答案】 $\frac{7}{12}$.



二(13) 题图 1

【解】 方法一 极坐标法

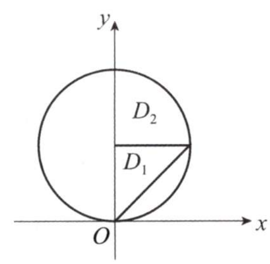
令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta\right\},$$

于是

$$\iint_D xy\,d\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin\theta\cos\theta\,dr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3dr=\frac{7}{12}.$$

方法二 区域划分



二(13) 题图 2

$$\iint_D xy\,d\sigma=\iint_{D_1}xy\,d\sigma+\iint_{D_2}xy\,d\sigma,$$

其中$\iint_{D_1}xy\,d\sigma=\int_0^1y\,dy\int_0^yx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1y^3dy=\frac{1}{8}$,

在 D_2 中,令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y-1=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right)$,则

$$\iint_{D_2}xy\,d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r^2\cos\theta(1+r\sin\theta)dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d(\sin\theta)=\frac{1}{3}+\frac{1}{8},$$

于是$\iint_D xy\,d\sigma=\frac{7}{12}$.

方法三 直角坐标法

由 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2}\}$,得

$$\iint_D xy\,d\sigma=\int_0^1x\,dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}}y\,dy=\frac{1}{2}\int_0^1x[(1+\sqrt{1-x^2})^2-x^2]dx$$

$$=\int_0^1(x+x\sqrt{1-x^2}-x^3)dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}.$$

方法点评：二重积分一般都是对基本计算方法的考查，所以要熟练掌握二重积分的直角坐标法和极坐标法. 注意使用极坐标法计算的特征有两个：

(1) 积分区域的边界曲线含 x^2+y^2； (2) 被积函数中含 x^2+y^2.

若区域为 $D: x^2+y^2 \leqslant 2ax+2by$，则往往使用 $\begin{cases} x-a=r\cos\theta, \\ y-b=r\sin\theta. \end{cases}$

(14)【答案】 2.

【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)=0$，

得 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=4$，则 f 的正惯性指数为 2.

三、解答题

(15)【解】 因为当 $\alpha \leqslant 0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$，所以 $\alpha>0$.

由洛必达法则得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$，即 $\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \sim \dfrac{1}{3}x^3$，

故由 $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)=0$ 得 $\alpha<3$；

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=0$，得 $\alpha-1>0$，

即 $\alpha>1$，故 α 的取值范围为 $1<\alpha<3$.

方法点评：本题考查无穷小与无穷大及其层次比较，注意如下几个小技巧：

(1) 对除幂函数之外的无穷小确定其阶数时，一般可采用待定次数法.

【例 1】 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，且 $f(x)\sim ax^b$，求 a,b 的值.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\dfrac{\sin x^2}{x^2}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{nx^{n-2}}$，

得 $n-2=0$，即 $n=2$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，即 $f(x)\sim x^2$，故 $a=1, b=2$.

【例 2】 设 $f(x)$ 一阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，又 $g(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \sim ax^b$，求 a,b.

【解】 $g(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 (x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{n(n-1)x^{n-2}}$ 得 $n-2=1$，即 $n=3$，

且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^3}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{3}$，即 $g(x)\sim\dfrac{1}{3}x^3$，故 $a=\dfrac{1}{3}, b=3$.

(2) 无穷大之商的极限一般采用洛必达法则，但当 $x\to+\infty$ 时，$\ln x, x^a(a>0)$，$b^x(b>1)$ 的无穷大的阶是由低到高的，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{a^x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^a}{b^x}=0$.

(16)【解】 由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=0$,得$t=\pm1$;

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{4t}{(t^2+1)^3},$$

当$t=-1$时,$x=-1$,$y=1$,因为$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=-1}=-\frac{1}{2}<0$,所以当$x=-1$时,函数$y=y(x)$取极大值$y=1$;

当$t=1$时,$x=\frac{5}{3}$,$y=-\frac{1}{3}$,因为$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=-1}=\frac{1}{2}>0$,所以当$x=\frac{5}{3}$时,函数$y=y(x)$取极小值$y=-\frac{1}{3}$.

令$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$得$t=0$,且$t=0$时,$x=\frac{1}{3}$,参数$t<0$对应$x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$;参数$t>0$对应$x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$.

当$t<0$,由$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}<0$得曲线$y=y(x)$的凸区间为$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$;当$t>0$时,由$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}>0$得曲线$y=y(x)$的凹区间为$x\in\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$,且$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$为曲线$y=y(x)$的拐点.

方法点评:本题是讨论由参数方程确定的函数的单调性与凹凸性,利用参数方程求导数的方法求函数的一阶导数和二阶导数,根据其符号讨论单调性与凹凸性,根据参数的情况得到函数的极值与凹、凸区间.

(17)【解】 **方法一** 由题意得$g'(1)=0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yf'_2\cdot g'(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y[xf''_{11}+f''_{12}\cdot g(x)]+f'_2\cdot g'(x)+yg'(x)[xf''_{21}+f''_{22}\cdot g(x)],$$

将$x=1$, $g(1)=1$, $g'(1)=0$代入得$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)$.

方法二 由题意得$g'(1)=0$,

$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yf'_2\cdot g'(x)$,将$x=1$代入得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=yf'_1(y,y)$,

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[yf'_1(y,y)]\right|_{y=1}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1).$$

(18)【解】 由题意得$y(0)=0$,$y'(0)=1$且$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

将$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$两边对$x$求导数得$\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

因为$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,所以$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3$.

令 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则原方程化为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p+p^3$,因为 $p\neq 0$,所以$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2$,

解得 $\arctan p=y+C_1$,由 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{\pi}{4}$,

于是 $y'=\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$,分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{\tan\left(y+\frac{\pi}{4}\right)}=\mathrm{d}x$,

积分得 $\ln\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=x+\ln c_2$,即 $\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)=C_2\mathrm{e}^x$,

由 $y(0)=0$ 得 $C_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$,于是 $y=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^x\right)-\frac{\pi}{4}$.

方法点评: 本题需要注意两点:

(1)α 为 x 的函数,即 $\alpha=\alpha(x)$;

(2)根据导数的几何意义得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha$.

(19)**【证明】**(Ⅰ)**方法一　单调性**

令 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$, $f(0)=0$,

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0(x>0)$,

由$\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0)\end{cases}$得 $f(x)>0(x>0)$,即当 $x>0$ 时,$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$;

令 $g(x)=x-\ln(1+x)$, $g(0)=0$, $g'(x)=1-\frac{1}{1+x}>0(x>0)$,

由$\begin{cases}g(0)=0,\\ g'(x)>0(x>0)\end{cases}$得 $g(x)>0(x>0)$,即当 $x>0$ 时,$\ln(1+x)<x$,

于是当 $x>0$ 时,有$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$,取 $x=\frac{1}{n}$,则有$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

方法二　中值定理

令 $f(t)=\ln(1+t)(t>0)$, $f(0)=0$, $f'(t)=\frac{1}{1+t}$,

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$,使得 $f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\frac{f'(\xi)}{n}$,

即 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n(1+\xi)}$,

因为$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{1+\xi}<\frac{1}{1+0}$,即$\frac{n}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}<1$,所以$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

方法三　因为当 $x\in[n,n+1]$ 时,$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$ 且不恒等,

所以$\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx$，即$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，整理得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$，则$\{a_n\}$单调减少，

因为$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

$$>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0,$$

所以$\{a_n\}$单调减少且有下界，故$\{a_n\}$收敛.

方法点评：在本题基础上需要掌握不等式证明中使用的放缩法.

【例】 证明：$\ln(1+n)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n$.

【证明】 当$x\in[1,2]$时，由$\frac{1}{1}\geqslant\frac{1}{x}$得$\int_1^2\frac{1}{1}dx\geqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx$，即$1\geqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx$，

当$x\in[2,3]$时，由$\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{x}$得$\int_2^3\frac{1}{2}dx\geqslant\int_2^3\frac{1}{x}dx$，即$\frac{1}{2}\geqslant\int_2^3\frac{1}{x}dx$，

同理$\frac{1}{3}\geqslant\int_3^4\frac{1}{x}dx,\cdots,\frac{1}{n}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$，相加得

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(1+n);$$

又当$x\in[1,2]$时，由$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}$得$\int_1^2\frac{1}{2}dx\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx$，即$\frac{1}{2}\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx$，

当$x\in[2,3]$时，由$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x}$得$\int_2^3\frac{1}{3}dx\leqslant\int_2^3\frac{1}{x}dx$，即$\frac{1}{3}\leqslant\int_2^3\frac{1}{x}dx$，

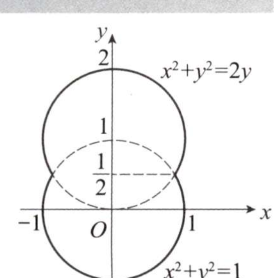
同理$\frac{1}{4}\leqslant\int_3^4\frac{1}{x}dx,\cdots,\frac{1}{n}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx$，相加得

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln n$，于是$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n$，

故 $$\ln(1+n)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n.$$

(20)**【解】** （Ⅰ）**方法一** 由对称性得容器的体积为

$V=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2dy=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)dy=\frac{9\pi}{4}.$



三(20)题图

方法二 曲线L：$\begin{cases}x=\sqrt{1-y^2}, & -1\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},\\ x=\sqrt{2y-y^2}, & \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 2,\end{cases}$

由旋转体的体积公式得

$$V=\pi\int_{-1}^{2}x^2dy=\pi\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dy\right]$$

$$=\pi\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\pi\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}2y\mathrm{d}y-\int_{-1}^{2}y^2\mathrm{d}y\right)$$

$$=\pi\left(\frac{3}{2}+4-\frac{1}{4}-3\right)=\frac{9\pi}{4}.$$

（Ⅱ）设上半部分做功为 W_1，取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset\left[\frac{1}{2},2\right]$，则

$$\mathrm{d}W_1=\rho g\pi r^2\mathrm{d}y\cdot(2-y)=\pi\rho g(2y-y^2)(2-y)\mathrm{d}y,$$

$$W_1=\pi\rho g\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2y-y^2)(2-y)\mathrm{d}y=-\pi\rho g\int_{\frac{1}{2}}^{2}[1-(1-y)^2][1+(1-y)]\mathrm{d}(1-y)$$

$$=-\pi\rho g\int_{\frac{1}{2}}^{-1}(1-y^2)(1+y)\mathrm{d}y=\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(1+y)\mathrm{d}y;$$

设下半部分做功为 W_2，取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，则

$$\mathrm{d}W_2=\rho g\pi r^2\mathrm{d}y\cdot(2-y)=\pi\rho g(1-y^2)(2-y)\mathrm{d}y,$$

$$W_2=\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(2-y)\mathrm{d}y,$$

于是 $W=W_1+W_2=\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(1+y)\mathrm{d}y+\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)(2-y)\mathrm{d}y$

$$=3\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{27}{8}\pi\rho g=\frac{27\times10^3}{8}\pi g.$$

方法点评：定积分的物理应用是数学一、数学二考查的内容，需要熟练掌握元素法的思想.

(21)**【解】** 显然 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=a$，

$$I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}[f'_x(x,y)],$$

由 $\int_0^1 y\mathrm{d}[f'_x(x,y)]=yf'_x(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y$ 得

$$I=\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y,$$

由 $\int_0^1 xf'_x(x,1)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}[f(x,1)]=0$ 得

$$I=-\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x\mathrm{d}[f(x,y)],$$

再由 $\int_0^1 x\mathrm{d}f(x,y)=xf(x,y)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=a.$$

方法点评：本题主要考查二重积分转化为累次积分及改变累次积分的积分次序，抽象函数的定积分的分部积分法.

(22)【解】 (Ⅰ)**方法一** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三个三维向量，因为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=1\neq 0$，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 一定可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的秩小于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩，

从而 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}=a-5=0$，故 $a=5$.

方法二 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 为四个三维向量，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 一定线性相关.

若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,3)$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，矛盾，于是 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=0$.

由 $|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0$，得 $a=5$.

(Ⅱ)将矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 进行初等行变换得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

于是
$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\\ \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.\end{cases}$$

方法点评：本题使用向量组的如下性质：

(1) 若一个向量组的向量个数大于向量的维数，则该向量组一定线性相关；

(2) 若一个向量组的个数与维数相等，则该向量组线性相关的充分必要条件是该向量组构成的行列式为零；

(3) 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，但向量组 B 不可由向量组 A 线性表示，则向量组 A 的秩小于向量组 B 的秩.

(23)【解】 (Ⅰ)由 $r(\boldsymbol{A})=2<3$，得 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是 $\lambda_1=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

又由已知条件得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，根据特征值与特征向量的定义得：

$\lambda_2=-1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$；

$\lambda_3=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_1=0$ 对应的一个特征向量，由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交得 $\begin{cases}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_2=0,\\ \boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0,\end{cases}$ 基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_1=0$ 对应的一个特征向量.

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=1$，其对应的所有特征向量为 $C_1\boldsymbol{\xi}_1,C_2\boldsymbol{\xi}_2,C_3\boldsymbol{\xi}_3$（$C_1,C_2,C_3$ 为全不为零的任意常数）.

（Ⅱ）**方法一**　令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

方法二　由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$，得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{0},-\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

方法点评：本题注重考查特征值与特征向量的定义，很多考生忽视了定义而不知道本题所给已知条件如何解读. 事实上求特征值常用方法有：

(1) 公式法，即由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 求出特征值；

(2) 定义法，即令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，根据矩阵的关系式，求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(3) 关联矩阵法，即找矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，从而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，于是求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

求特征向量的常用方法有：

(1) 设 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则属于 λ_0 的特征向量为 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的非零解；

(2) 定义法，满足 $\boldsymbol{AX}=\lambda_0\boldsymbol{X}$ 的非零 $\boldsymbol{X}$ 即为 λ_0 对应的特征向量；

(3) 利用矩阵关系求特征向量，如 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\dfrac{1}{\lambda_0}$ 的特征向量.