2010 年数学(二)真题解析

一、选择题

(1)【答案】(B).

【解】 显然 $x=0,x=\pm1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

由 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点,

由 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{-x}=-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=-1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=1$,得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点,

由 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$,得 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点,应选(B).

(2)【答案】(A).

【解】 由 y_1,y_2 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解得 $\begin{cases}y'_1+p(x)y_1=q(x),\\ y'_2+p(x)y_2=q(x).\end{cases}$

若 $\lambda y_1+\mu y_2$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解,则

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得 $\lambda[y'_1+p(x)y_1]+\mu[y'_2+p(x)y_2]=q(x)$,即 $(\lambda+\mu)q(x)=q(x)$,

因为 $q(x)\neq0$,所以 $\lambda+\mu=1$;

又若 $\lambda y_1-\mu y_2$ 为一阶微分齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解,则

$$\lambda[y'_1+p(x)y_1]-\mu[y'_2+p(x)y_2]=0,$$

整理得 $(\lambda-\mu)q(x)=0$,因为 $q(x)\neq0$,所以 $\lambda-\mu=0$,于是 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$,应选(A).

方法点评:本题考查线性微分方程解的结构与性质,事实上本题可以直接应用如下性质:

设 $y_1,y_2,\cdots,y_s$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的一组解,则

(1) $k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_sy_s$ 为一阶齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的解的充分必要条件是 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$;

(2) $k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_sy_s$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解的充分必要条件是 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

(3)【答案】(C).

【解】 设切点的横坐标为 x_0,则 $\begin{cases}x_0^2=a\ln x_0,\\ 2x_0=\dfrac{a}{x_0},\end{cases}$ 解得 $a=2\mathrm{e}$,应选(C).

(4)【答案】(D).

【解】 $x=0$ 与 $x=1$ 为反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的瑕点,

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x,$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=1$,

且$\alpha=\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{m}<1$,所以$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛;

又因为$\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\cdot\ln^{\frac{2}{m}}(1-x)\xlongequal{1-x=t}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln^{\frac{2}{m}}t}{t^{-\frac{1}{2}}}$

$$=\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-\frac{m}{4}}}\right)^{\frac{2}{m}}=\left(-\frac{4}{m}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{t^{-\frac{m}{4}-1}}\right)^{\frac{2}{m}}=0,$$

且$\alpha=\dfrac{1}{2}<1$,所以$\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛,故$\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛,应选(D).

方法点评:对区间有限但函数有无穷间断点的反常积分敛散性判断通常有定义法和判别法.

(1) 设 $f(x)\in C(a,b]$,且 $f(x)$ 在 $x=a$ 的右邻域内无界.

定义法:对任意的 $\varepsilon>0$,若$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

判别法:设$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^k f(x)=A(\neq\infty)$,则当 $0<k<1,0\leqslant A<+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;当 $k\geqslant 1,0<A\leqslant+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 设 $f(x)\in C[a,b)$,且 $f(x)$ 在 $x=b$ 的左邻域内无界.

定义法:对任意的 $\varepsilon>0$,若$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

判别法:设$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^k f(x)=A(\neq\infty)$,则当 $0<k<1,0\leqslant A<+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;当 $k\geqslant 1,0<A\leqslant+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(5)**【答案】** (B).

【解】 方法一 复合函数求导法则

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求偏导,得$-\dfrac{y}{x^2}F_1'+\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F_2'=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{xF_2'}(yF_1'+zF_2')$;

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 y 求偏导,得$\dfrac{1}{x}F_1'+\dfrac{1}{x}F_2'\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}$,

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{F_2'}(yF_1'+zF_2')-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=z$,应选(B).

方法二 公式法

令 $G(x,y,z)=F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$,

由 $G'_x=-\frac{y}{x^2}F'_1-\frac{z}{x^2}F'_2$，$G'_y=\frac{1}{x}F'_1$，$G'_z=\frac{1}{x}F'_2$，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G'_x}{G'_z}=\frac{\frac{y}{x^2}F'_1+\frac{z}{x^2}F'_2}{\frac{1}{x}F'_2}=\frac{1}{xF'_2}(yF'_1+zF'_2),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G'_y}{G'_z}=-\frac{\frac{1}{x}F'_1}{\frac{1}{x}F'_2}=-\frac{F'_1}{F'_2},$$

于是 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{F'_2}(yF'_1+zF'_2)-\frac{yF'_1}{F'_2}=z$，应选(B).

方法三　全微分法

$F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 两边求全微分，得 $F'_1\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)+F'_2\mathrm{d}\left(\frac{z}{x}\right)=0$，

整理得 $F'_1\cdot\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}+F'_2\cdot\frac{x\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$，从而有

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{xF'_2}(yF'_1+zF'_2)\mathrm{d}x-\frac{F'_1}{F'_2}\mathrm{d}y,$$

于是 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{xF'_2}(yF'_1+zF'_2)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_1}{F'_2}$，

故 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{F'_2}(yF'_1+zF'_2)-\frac{yF'_1}{F'_2}=z$，

应选(B).

(6)**【答案】**　(D).

【解】　取 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f(x,y)=\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$，

由 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$，根据二重积分的定义得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$，应选(D).

方法点评：用定积分、重积分等的定义求极限是极限计算的一种重要类型，重点考查定积分定义求极限.

(1) 定积分的定义求极限：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【例】　求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-n^2}}\right)$.

【解】　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\frac{2}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx,$$

于是原式 $=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx\right)=\frac{\pi}{4}$.

(2) 二重积分的定义求极限：$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$,

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(7)**【答案】** (A).

【解】 因为向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示，所以 r(Ⅰ) $\leqslant r$(Ⅱ)，且 r(Ⅱ) $\leqslant s$.

若向量组 Ⅰ 线性无关，则 r(Ⅰ) $=r$，所以 $r\leqslant s$，应选(A).

方法点评：本题考查向量组的秩的性质，应熟练掌握以下几个性质：

(1) 设向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示，则 r(Ⅰ) $\leqslant r$(Ⅱ)；

(2) 任何向量组的秩不超过其所含向量的个数；

(3) 向量组线性无关的充分必要条件是该向量组的秩与向量个数相等；向量组线性相关的充分必要条件是向量组的秩小于向量的个数；

(4) 若向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示，但反之不成立，则 r(Ⅰ) $<r$(Ⅱ).

(8)**【答案】** (D).

【解】 令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,

由 $(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\lambda^2+\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2+\lambda=0$，于是 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-1$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化且 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $\lambda=-1$ 为三重特征值，故 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$,

应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** $C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数).

【解】 特征方程为 $\lambda^3-2\lambda^2+\lambda-2=0$，解得特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_{2,3}=\pm i$,

则原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数).

(10)**【答案】** $y=2x$.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x^2+1}=0$,

得曲线 $y=\frac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为 $y=2x$.

(11)【答案】 $-2^n(n-1)!$.

【解】 方法一 归纳法

由 $y'=-\dfrac{2}{1-2x},y''=-\dfrac{2^2}{(1-2x)^2},y'''=-\dfrac{2^3\cdot 2!}{(1-2x)^3},\cdots$,根据归纳法得

$y^{(n)}=-\dfrac{2^n\cdot(n-1)!}{(1-2x)^n}$,于是 $y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!$.

方法二 麦克劳林公式法

由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+o(x^n)$,

得 $y=\ln(1-2x)=-2x-\dfrac{2^2x^2}{2}+\cdots-\dfrac{2^n}{n}x^n+o(x^n)$,

又由 $y(x)=y(0)+y'(0)x+\cdots+\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$,得 $\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=-\dfrac{2^n}{n}$,

于是 $y^{(n)}(0)=-2^n\cdot(n-1)!$.

(12)【答案】 $\sqrt{2}(e^{\pi}-1)$.

【解】 由 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=\sqrt{2}\,e^{\theta}d\theta$,得弧长为

$$\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{\theta}d\theta=\sqrt{2}(e^{\pi}-1).$$

(13)【答案】 3 cm/s.

【解】 矩形对角线长度为 $z=\sqrt{l^2+w^2}$ 且 $\dfrac{dl}{dt}=2,\dfrac{dw}{dt}=3$,

等式 $z=\sqrt{l^2+w^2}$ 两边对 t 求导,得 $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{l\dfrac{dl}{dt}+w\dfrac{dw}{dt}}{\sqrt{l^2+w^2}}$,于是 $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{(12,5)}=\dfrac{12\times 2+5\times 3}{\sqrt{12^2+5^2}}=3$,

故对角线增加的速率为 3 cm/s.

(14)【答案】 3.

【解】 方法一 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{ABB}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{E}|$

$$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AA}^{-1}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{3}{2}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=3.$$

方法二 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}$,得

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{B}^{-1}|\,|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=\frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{B}|}\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|=3.$$

三、解答题

(15)【解】 $f(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

令 $f'(x)=2x\displaystyle\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt=0$,得 $x=-1,x=0,x=1$.

方法一 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)>0$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

则 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,0)$ 及 $(1,+\infty)$,单调减区间为 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,1)$.

$f(x)$ 的极小值为 $f(\pm 1)=0$,极大值为 $f(0)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$.

方法二 $f''(x)=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{-x^4}$,

因为 $f''(\pm 1)=\frac{4}{\mathrm{e}}>0$, $f''(0)=-2\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0$,

所以 $x=-1,x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点,极小值为 $f(\pm 1)=0$,

$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,极大值为 $f(0)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

$f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,1)$,$f(x)$ 的单调增区间为 $(-1,0)$ 及 $(1,+\infty)$.

方法点评:本题考查变积分限形式表示的函数的单调性与极值.

对变积分限形式的函数,有两个习惯步骤:一是将被积分函数中去除上下限所含的变量(如本题被积函数中去除 x),二是对变化后的函数求导数.本题求单调区间与极值都属于基础知识范畴.

(16)**【解】** (Ⅰ)当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时,$\ln(1+t)\leqslant t$.

则当 $t\in(0,1)$ 时,$|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$.

于是 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$.

(Ⅱ)**方法一** 由(Ⅰ)得 $0\leqslant\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$,即

$$0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t,$$

$$\text{而}\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}(t^{n+1})=-\frac{1}{n+1}\left(t^{n+1}\ln t\Big|_0^1-\int_0^1 t^n\mathrm{d}t\right)$$

$$=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_0^1+\frac{1}{(n+1)^2},$$

因为 $\lim\limits_{t\to 0^+}t^{n+1}\ln t=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t^{n+1}}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{n+1}{t^{n+2}}}=-\frac{1}{n+1}\lim\limits_{t\to 0^+}t^{n+1}=0$,

所以 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)^2}$,从而 $0\leqslant\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}$,

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t=0$.

方法二 $0\leqslant\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\ln^n 2\int_0^1|\ln t|\mathrm{d}t$,即 $0\leqslant u_n\leqslant\ln^n 2\int_0^1|\ln t|\mathrm{d}t$,

而 $\int_0^1|\ln t|\mathrm{d}t=-\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}t=-t\ln t\Big|_0^1+\int_0^1\mathrm{d}t=-t\ln t\Big|_0^1+1$,

由 $\lim\limits_{t\to 0^+}t\ln t=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim\limits_{t\to 0^+}(-t)=0$,得 $\int_0^1|\ln t|\mathrm{d}t=1$,

于是 $0\leqslant u_n\leqslant\ln^n 2$,注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln^n 2=0$,由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(17)**【解】** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}}{2+2t}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3},$$

由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，得 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，

于是得满足初始条件的微分方程为 $\begin{cases}\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{(1+t)^2}=3,\\ \psi(1)=\dfrac{5}{2},\ \psi'(1)=6.\end{cases}$

方法一 由 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{(1+t)^2}=3$，得 $\psi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$，

解得 $\psi'(t)=\left[\int 3(1+t)e^{\int -\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1\right]e^{-\int -\frac{1}{1+t}dt}=C_1(1+t)+3t(1+t)$，

由 $\psi'(1)=6$ 得 $C_1=0$，于是 $\psi'(t)=3t(1+t)$，

积分得 $\psi(t)=\int 3t(1+t)dt=\dfrac{3}{2}t^2+t^3+C_2$，

由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$ 得 $C_2=0$，故 $\psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3$.

方法二 由 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{(1+t)^2}=3$，得 $\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\psi'(t)}{1+t}\right]=3$，从而 $\dfrac{\psi'(t)}{1+t}=3t+C_1$，

或 $\psi'(t)=3t(1+t)+C_1(1+t)$.

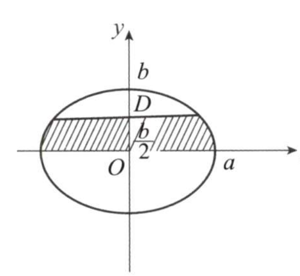
由 $\psi'(1)=6$ 得 $C_1=0$，于是 $\psi'(t)=3t(1+t)$，

积分得 $\psi(t)=\int 3t(1+t)dt=\dfrac{3}{2}t^2+t^3+C_2$，

由 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$ 得 $C_2=0$，故 $\psi(t)=\dfrac{3}{2}t^2+t^3$.

方法点评：本题是参数方程求导数与微分方程综合问题，先求导数，根据所给条件得到微分方程，解微分方程，并根据初始条件求出未知函数，本题微分方程的解法二注意掌握.

(18)**【解】** 建立如图所示的坐标系，油罐底面为椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，



三(18) 题图

方法一 x 轴下方的半椭圆面积为 $S_1=\dfrac{1}{2}\pi ab$，

设 x 轴上方的阴影部分面积为 S_2，

取 $[y,y+dy]\subset\left[0,\dfrac{b}{2}\right]$，

$dS_2=2|x|dy=2\sqrt{a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)}dy=2a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}dy$，

则 $S_2=\int_0^{\frac{b}{2}}dS_2=\dfrac{2a}{b}\int_0^{\frac{b}{2}}\sqrt{b^2-y^2}\,dy\xlongequal{y=b\sin t}2ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=ab\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

截口面积为 $S=S_1+S_2=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)ab$，体积为 $V=Sl=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl$，

故油的质量为 $m=\rho V=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho$.

方法二　设油面高度上方截口面积为 S_1，

取 $[y,y+\mathrm{d}y]\subset\left[\frac{b}{2},b\right]$，

$$\mathrm{d}S_1=2|x|\mathrm{d}y=2\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}y=\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y,$$

则 $S_1=\int_{\frac{b}{2}}^{b}\mathrm{d}S_1=\frac{2a}{b}\int_{\frac{b}{2}}^{b}\sqrt{b^2-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{y=b\sin t}\frac{2a}{b}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}b\cos t\cdot b\cos t\mathrm{d}t=2ab\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t$

$$=ab\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=ab\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=ab\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),$$

油面截口面积为 $S=\pi ab-ab\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)ab$，

体积为 $V=Sl=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl$，故油的质量为 $m=\rho V=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)abl\rho$.

(19)【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$$

$$=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

代入原方程得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,$$

由题意得 $\begin{cases}5a^2+12a+4=0,\\5b^2+12b+4=0,\\10ab+12(a+b)+8\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\frac{2}{5},\\b=-2.\end{cases}$

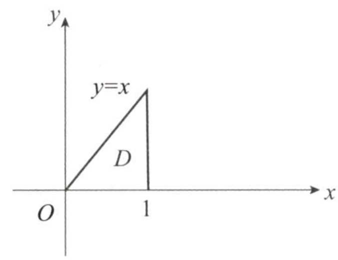
方法点评：(1) 变换前函数关系为 $u=f(x,y)$，在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下，函数关系变为 $u=u(\xi,\eta)$，$\begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\\eta=\eta(x,y),\end{cases}$ 即 ξ,η 为中间变量，利用复合函数求导数的法则可求

出$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(2) 因为 $u=f(x,y)$ 二阶连续可偏导，所以$\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}$.

(20)【解】 积分区域化为直角坐标形式表示为

$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，



三(20)题图

$$\text{则 } I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(1-x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\sin t}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}I_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

方法点评：用极坐标法计算二重积分通常具备如下两个特征之一：

(1) 积分区域的边界含 x^2+y^2； (2) 被积函数中含 x^2+y^2.

本题无论是积分区域还是被积函数都应该用直角坐标法，故先将区域及被积函数转化为直角坐标形式，再使用累次积分计算.

(21)【证明】 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{3}$， $F(0)=0$， $F(1)=0$.

由微分中值定理，存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi)=\frac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2],$$

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta)=\frac{1}{2}[f'(\eta)-\eta^2],$$

两式相加得 $F(1)-F(0)=\dfrac{1}{2}[f'(\xi)+f'(\eta)-\xi^2-\eta^2]=0$，

故 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

方法点评：将 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$ 化为 $f'(\xi)-\xi^2=f'(\eta)-\eta^2$，显然等式两边需要的辅助函数相同，都是 $f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$，显然辅助函数在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 与 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上使用拉格朗日中值定理即可.

(22)【解】 (Ⅰ) 因为线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同解，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，于是 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$，得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$.

当 $\lambda=-1$ 时，$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&2&0&a+1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$，所以 $a=-2$；

当 $\lambda=1$ 时，$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

因为 $r(\boldsymbol{A})=1\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以 $\lambda\neq1$，故 $\lambda=-1,a=-2$.

(Ⅱ) 由 $\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right]$，得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\text{（其中 }k\text{ 为任意常数）}.$$

(23)【解】 因为 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，所以 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，于是 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$ 也为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

由 $\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}-2+4=\lambda_1,\\-1+6+a=2\lambda_1,\end{cases}$ 解得 $\lambda_1=2,a=-1$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&-1\\4&-1&0\end{pmatrix},$$

再由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-4\\1&\lambda-3&1\\-4&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-5)=0$，

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=-4$，$\lambda_3=5$.

当 $\lambda_2=-4$ 时，解 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $(4\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $4\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&7&-1\\4&-1&4\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得 $\lambda_2=-4$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda_3=5$ 时，解 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1&-4\\1&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

得 $\lambda_3=5$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\text{则 } \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & 5\end{pmatrix}.$$

方法点评:本题的关键是正交矩阵$\boldsymbol{Q}$的三个列都是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量,给出$\boldsymbol{Q}$的第一列即给出 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量,根据特征值与特征向量的定义可求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的参数 a 及矩阵 $\boldsymbol{A}$,从而可求出 $\boldsymbol{A}$ 的其余特征值与线性无关的特征向量,再利用实对称矩阵的对角化原理.