# 2017 年数学(三)真题解析

## 一、选择题

(1)【答案】 (A).

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}$, $f(0)=f(0-0)=b$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(0+0)=f(0)=f(0-0)$,从而 $ab=\dfrac{1}{2}$,应选(A).

(2)【答案】 (D).

【解】 由 $\begin{cases} z'_x=3y-2xy-y^2=0, \\ z'_y=3x-2xy-x^2=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=3, \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases}$

$$z''_{xx}=-2y,\quad z''_{xy}=3-2x-2y,\quad z''_{yy}=-2x,$$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时,$AC-B^2=-9<0$,则 $(0,0)$ 不是极值点;

当 $(x,y)=(1,1)$ 时,$AC-B^2=3>0$ 且 $A=-2<0$,则 $(1,1)$ 为极大值点;

当 $(x,y)=(0,3)$ 时,$AC-B^2=-9<0$,则 $(0,3)$ 不是极值点;

当 $(x,y)=(3,0)$ 时,$AC-B^2=-9<0$,则 $(3,0)$ 不是极值点,应选(D).

(3)【答案】 (C).

【解】 **方法一** 若 $f(x)>0$,则 $f'(x)>0$,从而 $f(1)>f(-1)>0$;

若 $f(x)<0$,则 $f'(x)<0$,从而 $f(1)<f(-1)<0$,故 $|f(1)|>|f(-1)|$,应选(C).

**方法二** 由 $f(x)\cdot f'(x)=\left[\dfrac{1}{2}f^2(x)\right]'>0$ 得 $f^2(x)$ 单调递增,

从而 $f^2(1)>f^2(-1)$,故 $|f(1)|>|f(-1)|$,应选(C).

(4)【答案】 (C).

【解】 $\sin\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{6n^3}+o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$,

由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得 $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

于是 $\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=(k+1)\dfrac{1}{n}+\dfrac{k}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

由 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛得 $k=-1$,应选(C).

(5)【答案】 (A).

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,

令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$,由 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2-\lambda=0$,$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$,

因为 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$,$\lambda_n=1$,

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=1$,$\lambda_n=0$,从而 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}|=0$,

即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆,应选(A).

(6)【答案】 (B).

【解】 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的特征值都为 $\lambda_1=\lambda_2=2$,$\lambda_3=1$,

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，则 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，从而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 不相似，

应选(B).

**方法点评**：设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶矩阵，且 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值相同，则

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可相似对角化，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中一个可相似对角化，一个不可相似对角化，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不相似.

(7)**【答案】** (C).

**【解】** 
$$P[(A+B)C]=P(AC+BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$
$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC),$$
$$P(A+B)P(C)=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)$$
$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C),$$

$A\cup B$ 与 $C$ 独立即为 $P[(A+B)C]=P(A+B)P(C)$，

从而 $A\cup B$ 与 $C$ 独立的充分必要条件为

$P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC)=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C)$，

或 $P(ABC)=P(AB)P(C)$，即 $AB$ 与 $C$ 独立，应选(C).

(8)**【答案】** (B).

**【解】** 若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),\quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1),$$

因为总体 $X\sim N(\mu,1)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，

再由 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\right)$ 得 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)\sim N(0,1)$，从而 $n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，

不正确的是(B)，应选(B).

## 二、填空题

(9)**【答案】** $\dfrac{\pi^3}{2}$.

**【解】** 由定积分的奇偶性质得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{x=\pi\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi^2\cos^2t\,\mathrm{d}t=2\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^3}{2}.$$

(10)**【答案】** $C2^t+\dfrac{1}{2}t2^t$($C$ 为任意常数).

**【解】** 一阶齐次差分方程 $y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解为 $y_t=C2^t$($C$ 为任意常数)；

设 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的特解为 $y^*=at2^t$，代入得 $a=\dfrac{1}{2}$，

故 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=C2^t+\dfrac{1}{2}t2^t$（$C$ 为任意常数）.

(11)**【答案】** $1+(1-Q)e^{-Q}$.

**【解】** 平均成本为 $\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}=1+e^{-Q}$，总成本为 $C(Q)=Q+Qe^{-Q}$，故边际成本为

$$C'(Q)=1+(1-Q)e^{-Q}.$$

(12)**【答案】** $xye^y$.

**【解】** **方法一**

由 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy=d(xye^y)$ 得 $f(x,y)=xye^y+C$，

再由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(x,y)=xye^y$.

**方法二** 由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^y$ 得 $f(x,y)=\displaystyle\int ye^y dx+C=xye^y+C$，

再由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(x,y)=xye^y$.

(13)**【答案】** 2.

**【解】** $(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 可逆，

从而 $r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A})$，

由 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $r(\boldsymbol{A})=2$，故向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 2.

(14)**【答案】** $\dfrac{9}{2}$.

**【解】** $E(X)=-1+a+3b=0$，再由 $\dfrac{1}{2}+a+b=1$ 得 $a=b=\dfrac{1}{4}$，

则 $E(X^2)=(-2)^2\times\dfrac{1}{2}+1^2\times\dfrac{1}{4}+3^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{2}$.

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{9}{2}$.

**三、解答题**

(15)**【解】** $\displaystyle\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt\xlongequal{x-t=u}\int_0^x\sqrt{u}\,e^{x-u}du=e^x\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du$，

则 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}e^x\cdot\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.$$

(16)**【解】** $\displaystyle\iint_D\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dx\,dy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^2}{(1+x^2+y^4)^2}d(y^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}dy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+2x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\arctan x\Big|_0^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}\mathrm{d}(\sqrt{2}x)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(17)【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1)+1}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}.$$

**方法点评:本题考查定积分的定义求极限.**

**$n$ 项和求极限一般分为两种类型:**

**(1) 分子次数齐、分母次数齐,且分母的次数高于分子一次,采用定积分定义求极限,即**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

**(2) 若分子次数或分母次数不齐,一般使用夹逼定理.**

(18)【解】 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$,

$$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)},$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$, $g(0)=0$,

$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$, $g'(0)=0$,

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0,$$

由 $\begin{cases}g'(0)=0,\\ g''(x)<0(0<x<1)\end{cases}$ 得 $g'(x)<0(0<x<1)$;

再由 $\begin{cases}g(0)=0,\\ g'(x)<0(0<x<1)\end{cases}$ 得 $g(x)<0(0<x<1)$,

即 $f'(x)<0(0<x<1)$,

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$, $f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$,

即 $\frac{1}{\ln 2}-1<f(x)<\frac{1}{2}$,故 $\frac{1}{\ln 2}-1<k<\frac{1}{2}$.

(19)【证明】 (Ⅰ) 由 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$ 得 $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})$,

从而 $a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2})=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)(a_{n-2}-a_{n-3})$

$$=\cdots=\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)(a_1-a_0)=\frac{(-1)^n}{n!},$$

于是 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}+a_{n-1}=\dfrac{(-1)^n}{n!}+\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+a_{n-2}=\cdots=\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$,

$|a_n|\leqslant\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k!}\leqslant n-1\leqslant n$,

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,故幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}\geqslant1$.

(Ⅱ)$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,

$$
\begin{aligned}
(1-x)S'(x)&=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(na_n+a_{n-1})x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\\
&=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=xS(x),
\end{aligned}
$$

即 $S(x)$ 满足 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$.

由 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$ 得 $S'(x)-\left(-1-\dfrac{1}{x-1}\right)S(x)=0$,解得

$$S(x)=Ce^{-\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx}=\frac{Ce^{-x}}{1-x},$$

再由 $S(0)=1$ 得 $C=1$,故 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

(20)**【证明】** (Ⅰ)设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,

因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix},$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 两两不同,所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant2$,

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,从而 $r(\boldsymbol{A})<3$,于是 $r(\boldsymbol{A})=2$.

(Ⅱ)因为 $r(\boldsymbol{A})=2$,所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 基础解系含一个线性无关的解向量,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},\\\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

(21)**【解】** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$,

因为 $\lambda_3=0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=-3(a-2)=0$ 得 $a=2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$，得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

由 $-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{pmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_1=-3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$；

由 $6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$；

由 $0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$，

故正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，

$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\xlongequal{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}-3y_1^2+6y_2^2$.

(22)**【解】** （Ⅰ）$E(Y)=\int_0^1 y\cdot 2y\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$，

$P\{Y\leqslant E(Y)\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\,\mathrm{d}y=\frac{4}{9}$.

（Ⅱ）**方法一**　$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$，

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z \geqslant 3$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $0 \leqslant z < 1$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0, Y \leqslant z\}=P\{X=0, Y \leqslant z\}$

$$=P\{X=0\}P\{Y \leqslant z\}=\frac{1}{2}\int_0^z 2y\,\mathrm{d}y=\frac{z^2}{2};$$

当 $1 \leqslant z < 2$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0, Y \leqslant z\}=P\{X=0\}P\{Y \leqslant 1\}=\frac{1}{2}$；

当 $2 \leqslant z < 3$ 时，$F_Z(z)=P\{X=0, Y \leqslant z\}+P\{X=2, Z \leqslant z-2\}$

$$=P\{X=0\}P\{Y \leqslant 1\}+P\{X=2\}P\{Z \leqslant z-2\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{z-2} 2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2,$$

即 $F_Z(z)=\begin{cases} 0, & z<0, \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leqslant z<1, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2, & 2 \leqslant z<3, \\ 1, & z \geqslant 3, \end{cases}$

密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ z-2, & 2<z<3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

**方法二**　由全概率公式得

$F_Z(z)=P\{Z \leqslant z\}=P\{X+Y \leqslant z\}$

$=P\{X=0\}P\{X+Y \leqslant z \mid X=0\}+P\{X=2\}P\{X+Y \leqslant z \mid X=2\}$

$=\frac{1}{2}P\{Y \leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y \leqslant z-2\},$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0 \leqslant z < 1$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y \leqslant z\}=\frac{1}{2}\int_0^z 2y\,\mathrm{d}y=\frac{z^2}{2}$；

当 $1 \leqslant z < 2$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}P\{Y \leqslant 1\}=\frac{1}{2}$；

当 $2 \leqslant z < 3$ 时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{Y \leqslant z-2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{z-2} 2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{(z-2)^2}{2}$；

当 $z \geqslant 3$ 时，$F_Z(z)=1$，

故 $f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases} z, & 0<z<1, \\ z-2, & 2<z<3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(23)**【解】**　(Ⅰ) 由 $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$ 得 $\frac{X_1-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，

$Z_1$ 的分布函数为 $F(z)=P\{Z_1 \leqslant z\}$，

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $z \geqslant 0$ 时，$F(z)=P\left\{\left|\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right| \leqslant \frac{z}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1,$

故 $F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 2\Phi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right)-1, & z\geqslant 0.\end{cases}$

$Z_1$ 的密度函数为 $f(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right), & z>0.\end{cases}$

（Ⅱ）$E(Z)=E(|X_i-\mu|)=E(|X_1-\mu|)=\int_0^{+\infty} z\cdot\dfrac{2}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}z$

$$=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{z}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right)\mathrm{d}\left(\frac{z}{\sigma}\right)=2\sigma\int_0^{+\infty}t\varphi(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{2}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

由 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\overline{Z}$，得 $\sigma$ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\overline{Z}$.

（Ⅲ）似然函数为 $L=f(z_1)\cdots f(z_n)=\dfrac{2^n}{\sigma^n}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(z_1^2+\cdots+z_n^2)}\ (z_i>0, i=1,2,\cdots n)$，

$$\ln L=n\ln 2-n\ln\sigma-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}(z_1^2+\cdots+z_n^2),$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\ln L=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^3}(z_1^2+\cdots+z_n^2)=0$ 得 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$，

故 $\sigma$ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.