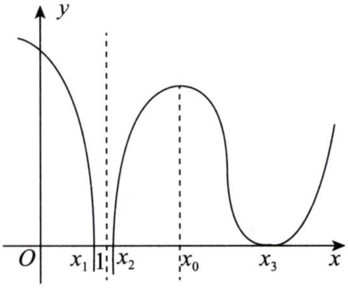
2016 年数学(三)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (B).

【解】 如图所示，$f'(x)$ 的零点从左到右依次为 $x_1(<1),x_2,x_3$.

由$\begin{cases}f'(x)>0,x<x_1,\\ f'(x)<0,x_1<x<1\end{cases}$得 $x=x_1$ 为 $f(x)$ 的极大值点；



一(1) 题图

由$\begin{cases}f'(x)<0,x_1<x<1,\\ f'(x)<0,1<x<x_2\end{cases}$得 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点；

由$\begin{cases}f'(x)<0,1<x<x_2,\\ f'(x)>0,x_2<x<x_3\end{cases}$得 $x=x_2$ 为 $f(x)$ 的极小值点；

由$\begin{cases}f'(x)>0,x_2<x<x_3,\\ f'(x)>0,x>x_3\end{cases}$得 $x=x_3$ 不是 $f(x)$ 的极值点，

故 $f(x)$ 有两个极值点.

$f''(x)$ 在 $x=1$ 处不存在，又 $f'(x)$ 切线水平对应的点为 x_0 及 x_3，

即 $f''(x_0)=0,f''(x_3)=0$.

由$\begin{cases}f''(x)<0,x<1,\\ f''(x)>0,1<x<x_0\end{cases}$得$(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

由$\begin{cases}f''(x)>0,1<x<x_0,\\ f''(x)<0,x_0<x<x_3\end{cases}$得$(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

由$\begin{cases}f''(x)<0,x_0<x<x_3,\\ f''(x)>0,x>x_3\end{cases}$得$(x_3,f(x_3))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，

即 $y=f(x)$ 有 3 个拐点，应选(B).

(2)**【答案】** (D).

【解】 $f'_x=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$,

$$f'_y=-\frac{e^x}{(x-y)^2}\cdot(-1)=\frac{e^x}{(x-y)^2},$$

则 $f'_x+f'_y=\dfrac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}+\dfrac{e^x}{(x-y)^2}=\dfrac{e^x}{x-y}=f$，应选(D).

(3)**【答案】** (B).

【解】 因为 D_1 区域关于 $y=x$ 对称，

所以 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{y-x}\,dx\,dy=-\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy$，于是 $J_1=0$；

令 $D_0=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，显然 D_0 关于 $y=x$ 对称，

$$J_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2\setminus D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_2\setminus D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy>0;$$

$$J_3=\iint\limits_{D_3}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_3\setminus D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_3\setminus D_0}\sqrt[3]{x-y}\,dx\,dy<0,$$

故 $J_3<J_1<J_2$,应选(B).

(4)**【答案】** (A).

【解】 $\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,

$$S_n=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$ 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 收敛,

由正项级数比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|$ 收敛,

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ 绝对收敛,应选(A).

(5)**【答案】** (C).

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似可知,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

对 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 两边取转置得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,或$[(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}]=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似,(A) 正确;

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$,即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(B) 正确;

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$,得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$,

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(D) 正确,应选(C).

(6)**【答案】** (C).

【解】 **方法一** 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-a+1&0\\0&0&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0,$$

得 $\lambda_1=a+2,\lambda_2=\lambda_3=a-1$.

因为正、负惯性指数分别为 1,2,所以 $\begin{cases}a+2>0,\\a-1<0,\end{cases}$ 解得 $-2<a<1$,应选(C).

方法二 取 $a=0$,二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$ 得 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，此时二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2，满足题设的条件，$a=0$ 时成立，应选(C).

(7)**【答案】** (A).

【解】 **方法一** 由 $P(A\mid B)=1$ 得 $P(B)=P(AB)$，

于是
$$P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A+B})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(A)}$$
$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=1,$$

应选(A).

方法二 由 $P(A\mid B)=1$ 得 $P(B)=P(AB)$，从而 $P(\overline{A}B)=0$，于是 $P(B\mid\overline{A})=0$. 因为 $P(B\mid\overline{A})+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$，所以 $P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$，应选(A).

(8)**【答案】** (C).

【解】 由 $X\sim N(1,2),Y\sim N(1,4)$ 得 $E(X)=1,D(X)=2,E(Y)=1,D(Y)=4$.

$D(XY)=E(XY)^2-[E(XY)]^2=E(X^2Y^2)-(EX)^2(EY)^2$，

因为 X,Y 相互独立，所以 $E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2)$，

又因为 $E(X^2)=D(X)+(EX)^2=3,E(Y^2)=D(Y)+(EY)^2=5$，所以 $E(X^2Y^2)=15$，

故 $D(XY)=15-1=14$，应选(C).

二、填空题

(9)**【答案】** 6.

【解】 由 $\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\sin 2x\sim xf(x)(x\to 0$ 时$)$ 得
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)=2,$$
故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

(10)**【答案】** $\sin 1-\cos 1$.

【解】
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x\,dx$$
$$=-\int_0^1 x\,d(\cos x)=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx$$
$$=-\cos 1+\sin 1=\sin 1-\cos 1.$$

(11)**【答案】** $-dx+2dy$.

【解】 将 $x=0,y=1$ 代入得 $z=1$.

$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边关于 x 求偏导得
$$z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f'_1(x-z,y)\cdot(1-z'_x),$$
将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得 $z'_x(0,1)=-1$；

$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边关于 y 求偏导得

$$(x+1)z'_y-2y=x^2[f'_1(x-z,y)(-z'_y)+f'_2(x-z,y)],$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得 $z'_y(0,1)=2$，

故 $\mathrm{d}z\mid_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

(12)**【答案】** $\frac{1}{3}-\frac{2}{3\mathrm{e}}$.

【解】 令 $D_1=\{(x,y)\mid x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}$，则

$$\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 y^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}(y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{2}{3\mathrm{e}}.$$

(13)**【答案】** $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$.

【解】

$$\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\cdot\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1&0\\0&\lambda&-1\\4&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left[\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1\\2&\lambda+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&-1\\3&\lambda+1\end{vmatrix}\right]+\begin{vmatrix}0&-1\\4&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[\lambda(\lambda^2+\lambda+2)+3]+4$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

(14)**【答案】** $\frac{2}{9}$.

【解】 前三次只能取到两种颜色的球，第四次取到的球不能在前三次中出现.

如第四次取到红球，则前三次中为两次白球一次黑球，或一次白球两次黑球，

故所求的概率为 $$p=\frac{C_3^1\times C_3^1\times A_2^2}{3^4}=\frac{2}{9}.$$

三、解答题

(15)**【解】** **方法一** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$，

$$\text{而}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 2x+2x\sin x-1)]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x+2\cos x-x\sin x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x-3\sin x-x\cos x}{12x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{x}-\frac{1}{4}\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{12}\right)=\frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

方法二

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos 2x+2x\sin x-1)]^{\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x-1}}\right\}^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}},$$

由 $\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$,

$x\sin x=x^2-\frac{x^4}{3!}+o(x^4)$

得 $\cos 2x+2x\sin x-1\sim\frac{1}{3}x^4$,

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}=\frac{1}{3}$,故 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=e^{\frac{1}{3}}$.

(16)**【解】**(Ⅰ)由题意得

$$\eta=-\frac{\frac{dQ}{dP}}{\frac{Q}{P}}=\frac{P}{120-P},$$

整理得 $\frac{dQ}{dP}+\frac{1}{120-P}\cdot Q=0$,解得 $Q=Ce^{-\int\frac{1}{120-P}dP}=C(120-P)$,

因为最大需求量为 1200,所以 $C=10$,故 $Q=1200-10P$.

(Ⅱ)收益函数为 $R=PQ=120Q-\frac{Q^2}{10}$,

边际收益为 $R'(Q)=120-\frac{Q}{5}$.

当 $P=100$ 时,$Q=200$,故当 $P=100$ 时,边际收益为 $R'(200)=80$.

其经济意义为:当销售第 201 件商品时所得的收益为 80 万元.

(17)**【解】** 当 $0<x<1$ 时,

$$f(x)=\int_0^x(x^2-t^2)dt+\int_x^1(t^2-x^2)dt=x^3-\frac{1}{3}x^3+\frac{1-x^3}{3}-x^2(1-x)$$

$$=\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}-x^2;$$

当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)dt=x^2-\frac{1}{3}$,

则 $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}-x^2, & 0<x<1,\\ x^2-\frac{1}{3}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)=4x^2-2x$;

当 $x>1$ 时,$f'(x)=2x$.

由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{3}-x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=2$,即 $f'_-(1)=2$;

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}{x-1}=2\text{，即 } f'_+(1)=2,$$

得 $f'(1)=2$，

于是 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, & 0<x<1,\\ 2x, & x\geqslant 1.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$，

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，故 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最小值点，最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

(18)【解】 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$；

$\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，

原等式化为 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$，

两边求导得 $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}$，

两边再求导得 $f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，

从而 $f(x)=\left[\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\int -\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$，

由 $f(0)=-1$ 得 $C=-\frac{1}{2}$，故 $f(x)=-\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(19)【解】 **方法一**

因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2n+4}}{(n+2)(2n+3)}}{\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}\right|=x^2$，所以当 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，幂级数发散.

当 $x=\pm1$ 时，因为 $\left|\frac{(\pm1)^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}\right|=\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\sim\frac{1}{2n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛，

所以 $x=\pm1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 绝对收敛，故收敛域为[$-1,1$].

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$，

$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，　$S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}(-1<x<1)$.

因为 $S(0)=0$，$S'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,1)$ 时，

$S'(x)=\int_0^x S''(x)\mathrm{d}x=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，

$S(x)=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$，

又 $S(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)=2\ln 2$，　$S(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}S(x)=2\ln 2$，

故 $S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & -1<x<1,\\ 2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}$

方法二

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1/[(n+2)(2n+3)]}{1/[(n+1)(2n+1)]}\right|=1$ 得收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，因为 $\left|\dfrac{(\pm 1)^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}\right|\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛，

所以幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\pm 1)^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 绝对收敛，其收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$，则

$$S(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right),$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{2n+1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x=x\int_0^x(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n})\mathrm{d}x$

$$=x\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)](-1<x<1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x x^{2n+1}\mathrm{d}x\right)=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)=-\frac{1}{2}[\ln(1+x)+\ln(1-x)](-1<x<1),$$

于是 $S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)(-1<x<1)$；

又 $S(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}S(x)=2\ln 2$，　$S(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+}S(x)=2\ln 2$，

故 $S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & -1<x<1,\\ 2\ln 2, & x=\pm 1.\end{cases}$

(20)**【解】**（Ⅰ）

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 1 & 0 & a & 1\\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1-a & 0\\ 0 & -1 & 2a-1 & 1\\ 0 & 0 & -a^2+2a & a-2\end{array}\right).$$

因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解，所以 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，

从而 $-a^2+2a=0$，于是 $a=0$ 或 $a=2$.

当 $a=2$ 时，$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{\beta})\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$，

此时 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，所以 $a=2$ 时，方程组有无数个解，矛盾，故 $a=0$.

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$，

由 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2\end{array}\right) \rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$,

得方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}0 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 \\ -2 \\ 0\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

(21)**【解】**（Ⅰ）

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$,

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2, \lambda_3=0$.

将 $\lambda_1=-1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda_1=-1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_2=-2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_2=-2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_3=0$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,

由 $-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}3 \\ 2 \\ 2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得

$$\boldsymbol{A}^{99}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^{99}&0&0\\0&(-2)^{99}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$ 得 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{B}^{98}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}^{99}\boldsymbol{A}=\cdots=\boldsymbol{BA}^{99}$,

即$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$,

故$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\\\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3.\end{cases}$

(22)**【解】** (Ⅰ) 区域 D 的面积为 $A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

随机变量(X,Y)的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

(Ⅱ) 设(U,X)的联合分布函数为 $G(u,x)$,

$G\left(0,\frac{1}{2}\right)=P\left\{U\leqslant 0,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$,

$P\{U\leqslant 0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$,

$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}$,

因为$\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8}\right)$,所以 U 与 X 不独立.

(Ⅲ) 当 $z<0$ 时,$F(z)=0$;

当 $0\leqslant z<1$ 时,

$$\begin{aligned}F(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{U=0,X\leqslant z\}=P\{X>Y,X\leqslant z\}\\&=\int_0^z\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{3}{2}z^2-z^3;\end{aligned}$$

当 $1\leqslant z<2$ 时,

$$\begin{aligned}F(z)&=P\{U+X\leqslant z\}=P\{U=0,X\leqslant z\}+P\{U=1,X\leqslant z-1\}\\&=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2;\end{aligned}$$

当 $z\geqslant 2$ 时,$F(z)=1$,

$$
故\ F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}
$$

(23)**【解】** （Ⅰ）总体 X 的分布函数为 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $x\geqslant\theta$ 时，$F(x)=1$；

当 $0\leqslant x<\theta$ 时，$F(x)=\int_0^x \dfrac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{\theta^3}$，即

$$
F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}
$$

设 T 的分布函数为 $F_T(t)$，则

$$
\begin{aligned}
F_T(t)&=P\{T\leqslant t\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\}\\
&=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}\\
&=P^3\{X\leqslant t\}=F^3(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{t^9}{\theta^9}, & 0\leqslant t<\theta,\\ 1, & t\geqslant\theta.\end{cases}
\end{aligned}
$$

随机变量 T 的概率密度为 $f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（Ⅱ）$E(aT)=aE(T)=a\int_0^{\theta}t\cdot\dfrac{9t^8}{\theta^9}\mathrm{d}t=\dfrac{9a}{10}\theta$，由 $E(aT)=\theta$ 得 $a=\dfrac{10}{9}$.