

2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学 (三) 试题

一、选择题: 1-8 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点

(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ()

- A. $f'_x - f'_y = 0$
- B. $f'_x + f'_y = 0$
- C. $f''_x - f''_y = f$
- D. $f''_x - f''_y = f$

(3) 设 $J_k = \iint_{D_k} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ 则 ()

- A. $J_1 < J_2 < J_3$
- B. $J_3 < J_1 < J_2$
- C. $J_2 < J_3 < J_1$
- D. $J_2 < J_1 < J_3$

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \sin(n+k)$ (k 为常数) ()

- A. 绝对收敛
- B. 条件收敛
- C. 发散
- D. 收敛性与 k 有关

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

- A. A^T 与 B^T 相似
- B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似
- C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似
- D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则 ()

- A. $a > 1$
- B. $a < -2$
- C. $-2 < a < 1$
- D. $a = 1$ 或 $a = -2$

(7) 设 A, B 为两个随机变量, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则 ()

- A. $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$
- B. $P(A|\overline{B}) = 0$
- C. $P(A \cup B) = 1$
- D. $P(B|A) = 1$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) = ()$

- A. 6
- B. 8
- C. 14
- D. 15

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n}) =$ _____.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

(12) 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ _____.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ _____.

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率为 _____.

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

(16) (本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性 $\eta = \frac{p}{120-p} (\eta > 0)$, p 为单价 (万元)。

(I) 求需求函数的表达式;

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际效益, 并说明其经济意义。

(17) 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值。

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$ 。

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解,

求: (1) 求 a 的值

(2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 A^{99}

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$ 。记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ，将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y. \\ 0, & X > Y. \end{cases}$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度；

(II) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$ 。

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数， X_1, X_2, X_3 为来自 X 的简单随机样本，令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ 。

(1) 求 T 的概率密度；

(2) 确定 a ，使得 $E(aT) = \theta$ 。