2015 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【解】 设 $f''(x)=0$ 左边的零点为 $x=a$,右边的零点为 $x=b$,

又在 $x=0$ 处 $f''(x)$ 不存在.

因为 $x=a$ 的左、右两侧 $f''(x)$ 都大于零,所以$(a,f(a))$不是拐点;

因为 $x=0$ 左、右两侧 $f''(x)$ 异号,所以$(0,f(0))$为拐点;

因为 $x=b$ 左、右两侧 $f''(x)$ 异号,所以$(b,f(b))$为拐点,

故 $y=f(x)$ 有两个拐点,应选(C).

方法点评:本题考查拐点的判别法.判断曲线的拐点时,首先找出二阶导数为零的点及二阶不可导的点,其次判断该点两侧二阶导数的符号情况,若该点两侧二阶导数异号,则曲线上对应的点为拐点.

(2)**【答案】** (A).

【解】 因为 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$ 为 $y''+ay'+by=ce^x$ 的特解,

所以 $y''+ay'+by=0$ 的特征方程的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$,则 $a=-3,b=2$.

显然 $y=xe^x$ 为原方程的特解,将 $y=xe^x$ 代入原方程得 $c=-1$,应选(A).

(3)**【答案】** (B).

【解】 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛区间为 $-1<x-1<1$,即 $0<x<2$.

因为$\sqrt{3}-1\in(-1,1)$, $3-1\notin[-1,1]$,

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=\sqrt{3}$ 处绝对收敛,在 $x=3$ 处发散,

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 收敛半径相同、收敛区间相同,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 在 $x=\sqrt{3}$ 处绝对收敛,在 $x=3$ 处发散,应选(B).

(4)**【答案】** (B).

【解】 令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right)$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r,\text{应选(B)}.$$

(5)**【答案】** (D).

【解】 因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无数个解,所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$,

由 $|\boldsymbol{A}|=(a-1)(a-2)=0$ 得 $a=1,a=2$,

当 $a=1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&1&d\\1&4&1&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&3&0&d^2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&0&d-1\\0&0&0&d^2-3d+2\end{array}\right),$$

因为方程组有无数个解，所以 $d=1$ 或 $d=2$；

当 $a=2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&2&d\\1&4&4&d^2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&3&3&d^2-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&1&d-1\\0&0&0&d^2-3d+2\end{array}\right),$$

因为方程组有无数个解，所以 $d=1$ 或 $d=2$，应选(D).

方法点评：本题考查非齐次线性方程组的基本理论. 本题非齐次线性方程组有无数个解的两个关键点为：$r(\boldsymbol{A})<3$ 及 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(6)**【答案】** (A).

【解】 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}$ 化为标准形 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，

因为 $\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2$ 为特征值 $2,-1,1$ 对应的特征向量，

所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下二次型的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，应选(A).

方法点评：本题考查实对称矩阵对角化及二次型理论.

二次型标准化有配方法和正交变换法，配方法化二次型为标准形时，其系数不一定为矩阵的特征值；正交变换法化二次型为标准形时，其系数一定为特征值，注意特征向量与特征值的次序要保持一致.

(7)**【答案】** (C).

【解】 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，

因为 $P(A+B)\geqslant P(AB)$，所以 $P(A)+P(B)-P(AB)\geqslant P(AB)$，

故 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，应选(C).

(8)**【答案】** (D).

【解】 由 X,Y 不相关得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，从而 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E(X^2)+E(XY)-2E(X)\\&=D(X)+[E(X)]^2+E(X)E(Y)-2E(X)=3+4+2-4=5,\end{aligned}$$

应选(D).

二、填空题

(9)**【答案】** $-\dfrac{1}{2}$.

【解】 **方法一** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

方法二 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{1}{2}$.

(10)【答案】 $\dfrac{\pi^2}{4}$.

【解】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|x|\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{4}$.

方法点评:本题考查定积分的奇偶性质,即

$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$,特别地,

当 $f(-x)=f(x)$ 时,$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

当 $f(-x)=-f(x)$ 时,$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

(11)【答案】 $-\mathrm{d}x$.

【解】 **方法一** 将 $x=0,y=1$ 代入 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 中,得 $z=0$,

$\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$$\mathrm{e}^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+1-\sin x=0,\quad \mathrm{e}^z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+x\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

代入得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=-1,\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=0$,

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x$.

方法二 将 $x=0,y=1$ 代入 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 中得 $z=0$.

$\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 两边求全微分得

$$\mathrm{e}^z\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}x=0,$$

将 $x=0,y=1,z=0$ 代入得 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x$.

(12)【答案】 $\dfrac{1}{4}$.

【解】 **方法一** 由对称性得

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega(x+2y+3z)\mathrm{d}v&=6\iiint_\Omega z\mathrm{d}v\\&=6\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=-\left.\frac{(1-x)^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

方法二 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,0\leqslant z\leqslant 1-x-y\}$,

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$,则

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega(x+2y+3z)\mathrm{d}v&=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(x+2y+3z)\mathrm{d}z\\&=\iint_D\left[(x+2y)(1-x-y)+\frac{3}{2}(1-x-y)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[(x+2y)(1-x-y)+\frac{3}{2}(1-x-y)^2\right]\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(13)【答案】 $2^{n+1}-2$.

【解】 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}+2\times A_{1n}$

$=2D_{n-1}+2\times(-1)^{n+1}\times(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$

$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2$

$=\cdots=2^n+\cdots+2^2+2=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2.$

(14)【答案】 $\dfrac{1}{2}$.

【解】 因为 $\rho=0$,所以 X,Y 独立且不相关,且 $X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$,

$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}$

$=P\{X<1\}P\{Y>0\}+P\{X>1\}P\{Y<0\}$

$=\dfrac{1}{2}(P\{X<1\}+P\{X>1\})=\dfrac{1}{2}.$

方法点评:本题考查二维正态分布的性质.设 (X,Y) 服从二维正态分布,则 X,Y 独立与 X,Y 不相关等价.

三、解答题

(15)【解】 **方法一** 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3),\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 得

$f(x)=x+ax-\dfrac{ax^2}{2}+\dfrac{ax^3}{3}+bx^2+o(x^3)=(1+a)x+\left(b-\dfrac{a}{2}\right)x^2+\dfrac{a}{3}x^3+o(x^3)$,

因为 $f(x)\sim g(x)$,

所以 $1+a=0,b-\dfrac{a}{2}=0,\dfrac{a}{3}=k$,解得 $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$.

方法二 由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$,得 $a=-1$,

再由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}$,得 $b=-\dfrac{1}{2}$,

再由 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x}{6kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x}{6kx}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{6k}=-\frac{1}{3k},\text{得 } k=-\frac{1}{3}.$$

(16)**【解】** $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

令 $y=0$,则 $x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$,

切线、$x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积为

$$S=\frac{1}{2}f(x_0)\left[x_0-\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)\right]=4,$$

即 $\dfrac{1}{2}y^2=4y'$,变量分离得 $\dfrac{8\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x$,积分得 $-\dfrac{8}{y}=x+C$,

因为 $y(0)=2$,所以 $C=-4$,故所求的曲线为 $y=\dfrac{8}{4-x}$.

(17)**【解】** $f'_x(x,y)=1+y,\quad f'_y=1+x$,

$f(x,y)$ 在点 (x,y) 的方向导数取的最大值的方向即梯度的方向,且最大值即梯度的模,

则最大值为 $g(x,y)=|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$.

令 $F=(x+1)^2+(y+1)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$,

由 $\begin{cases}F'_x=2(x+1)+2\lambda x+\lambda y=0\\F'_y=2(y+1)+2\lambda y+\lambda x=0\\F'_\lambda=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$,解得

$$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$$

由 $g(1,1)=\sqrt{8}$,$g(-1,-1)=0$,$g(2,-1)=\sqrt{9}=3$,$g(-1,2)=\sqrt{9}=3$ 得方向导数的最大值为 3.

方法点评:本题考查方向导数与梯度的关系.

方向导数为 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}$,

其中 $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\}=\mathbf{grad}\ f$,$\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\boldsymbol{e}$ 为与射线 l 方向相同的单位向量,

设梯度 $\mathbf{grad}\ f$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 θ,则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=|\mathbf{grad}\ f|\cdot|\boldsymbol{e}|\cdot\cos\theta=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\cdot\cos\theta,$$

当 $\cos\theta=1$,即 $\theta=0$ 或 $\mathbf{grad}\ f$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向时,方向导数达到最大值.

故梯度的方向即为方向导数取最大值的方向,且方向导数的最大值为梯度的模.

(18)**【证明】** (Ⅰ)令 $f(x)=u(x)v(x)$,

$$\begin{aligned}\Delta f&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&=\Delta uv(x+\Delta x)+u(x)\Delta v,\end{aligned}$$

则$[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

(Ⅱ)$f'(x)=u'_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u'_2(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u'_n(x)$.

(19)【解】 L 的参数方程为$L:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sqrt{2}\sin t,\\ z=\cos t,\end{cases}$其中起点 $t=\dfrac{\pi}{2}$,终点 $t=-\dfrac{\pi}{2}$,则

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\sin t+\cos t)(-\sin t)\mathrm{d}t+\sqrt{2}\sin t\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t+2\sin^2 t\cos^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

(20)【解】 (Ⅰ)$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$,

因为$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=4\neq 0$,所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一组基.

(Ⅱ)令 $\boldsymbol{\xi}$ 在两组基下的坐标都是(x_1,x_2,x_3),

由 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3$,或

$x_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,整理得

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0},$$

因为 $\boldsymbol{\xi}$ 为非零向量,所以 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$ 有非零解,

从而 $|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3|=0$,

而 $|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}$且 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$,

则$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=0$,故 $k=0$.

当 $k=0$ 时,由 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,

即 $\boldsymbol{\alpha}_1x_1+\boldsymbol{\alpha}_2x_2+\boldsymbol{\alpha}_1x_3=\mathbf{0}$,或$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$,

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个基,所以$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆,

于是$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$,故 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}(C \text{ 为任意常数}).$$

方法点评：本题考查向量空间的理论.

向量空间理论是数学一的专门考查内容，包括：

向量空间的概念、基、过渡矩阵、向量在基下的坐标.

(21)【解】 (Ⅰ)因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以 $\begin{cases} \operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \operatorname{tr} \boldsymbol{B}, \\ |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|, \end{cases}$

从而 $\begin{cases} a+3=b+2, \\ 2a-3=b, \end{cases}$ 解得 $a=4, b=5$.

(Ⅱ)因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值相同，

由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda-5 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$ 得

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=5$.

将 $\lambda=1$ 代入 $(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

将 $\lambda=5$ 代入 $(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 得

$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=5$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(22)【解】 (Ⅰ)令 $p = P\{X>3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x} \ln 2 \mathrm{d}x = -2^{-x} \big|_3^{+\infty} = \dfrac{1}{8}$，

Y 的可能取值为 $2,3,\cdots$，Y 的分布律为

$$P\{Y=k\} = p \cdot \mathrm{C}_{k-1}^1 \cdot p \cdot (1-p)^{k-2} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2} (k=2,3,\cdots).$$

$$(\text{Ⅱ}) E(Y) = \sum_{k=2}^{\infty} kP\{Y=k\} = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

$$= p^2 \Big(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\Big)'' \Big|_{x=\frac{7}{8}} = p^2 \Big(\frac{x^2}{1-x}\Big)'' \Big|_{x=\frac{7}{8}} = \frac{2p^2}{(1-x)^3} \Big|_{x=\frac{7}{8}} = 16.$$

(23)**【解】**（Ⅰ）$E(X)=\int_{\theta}^{1}\frac{x}{1-\theta}\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，则 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

（Ⅱ）似然函数为

$$L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\frac{1}{(1-\theta)^n}(\theta\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n),$$

因为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}L(\theta)=\frac{n}{(1-\theta)^{n+1}}>0$，所以 $L(\theta)$ 关于 θ 为增函数，

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.