

Table of Contents

[内容简介](#)

[目 录](#)

[2015年杭州师范大学721量子力学考研真题](#)

[2014年杭州师范大学721量子力学考研真题](#)

[2013年杭州师范大学722量子力学考研真题](#)

[2012年杭州师范大学719量子力学考研真题](#)

[2011年杭州师范大学726量子力学考研真题](#)

[2010年杭州师范大学716量子力学考研真题](#)

[2009年杭州师范大学715量子力学考研真题](#)

[2008年杭州师范大学715量子力学考研真题](#)

[2007年杭州师范学院715量子力学考研真题](#)

[2006年杭州师范学院量子力学考研真题](#)

目 录

[2015年杭州师范大学721量子力学考研真题](#)

[2014年杭州师范大学721量子力学考研真题](#)

[2013年杭州师范大学722量子力学考研真题](#)

[2012年杭州师范大学719量子力学考研真题](#)

[2011年杭州师范大学726量子力学考研真题](#)

[2010年杭州师范大学716量子力学考研真题](#)

[2009年杭州师范大学715量子力学考研真题](#)

[2008年杭州师范大学715量子力学考研真题](#)

[2007年杭州师范学院715量子力学考研真题](#)

[2006年杭州师范学院量子力学考研真题](#)

2015年杭州师范大学721量子力学考研真题

考试科目代码： 721

考试科目名称： 量子力学

一、填空题（每空3分，共30分）、

1. 根据德布罗意波粒二象性，能量为E，动量为p 的微观粒子，与对应的波动的频率 ν 和波长 λ 的关系式分别是_____，_____。
2. 完成对易关系： $[x, \hat{p}_x] =$ ____， $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] =$ _____。
3. 量子力学中的薛定谔方程的形式为_____，定态薛定谔方程为_____，从定态的解出发构造薛定谔方程的一般解的表达形式为_____。
4. 设两力学量算符 \hat{A}, \hat{B} 满足对易关系 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ ，则力学量A和B的测不准关系式为_____。
5. 全同粒子体系的波函数的特点是_____，原因是_____。

二、简答题（每题6分，共30分）

1. 量子力学中微观粒子的波粒二象性与光的波粒二象性有什么区别？
2. 叙述量子力学中物理量算符的性质以及与力学量测量值之间的关系。
3. 说明当势能 $V(x)$ 是偶函数时，定态薛定谔方程的解 $\psi(x)$ 总可以写成偶函数或者奇函数的形式。
4. 叙述（或者通过变换关系式描述）你对量子力学中的表象变换的理解。
5. 如何理解电子的自旋？

三、计算题（90分）

1. （15分）质量为 m 的粒子，在一维无限深势阱中
$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$
中运动。求
(1) 求粒子的能量本征值和本征函数；（5分）
(2) 若 $t=0$ 时，粒子处于 $\psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{2}}\phi_1(x) - \sqrt{\frac{1}{3}}\phi_2(x) + \sqrt{\frac{1}{6}}\phi_3(x)$ 状态上，其中， $\phi_n(x)$ 为粒子能量的第 n 个本征态。求 $t=0$ 时能量的可测值与相应的取值几率；（5分）
(3) 求 $t>0$ 时的波函数 $\psi(x,t)$ 及能量可测值与相应的取值几率。（5分）

2. (10分) 设 $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为氢原子的能量为 E_n 定态波函数, 当 $t=0$ 时氢原

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{100} + \sqrt{3}\psi_{210} + \psi_{211} + \sqrt{2}\psi_{21-1})$$

子处于状态

求: (1) 氢原子能量及其几率; (4分)

(2) 轨道角动量平方 \hat{L}^2 的可能值, 可能值出现的几率以及 \hat{L}^2 的平均值; (4分)

(3) z 分量 \hat{L}_z 的可能值, 可能值出现的几率以及 \hat{L}_z 的平均值; (2分)

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2} - \frac{i}{2} \alpha x}$$

3. (15分) 假设量子系统的基态为

(1) 势能的平均值 $\bar{V} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \bar{x}^2$; (5分)

(2) 动能的平均值 $\bar{T} = \frac{\bar{p}^2}{2\mu}$; (5分)

(3) 动量的几率分布函数。(5分) (提示: $\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$)

4. (15分) 一维谐振子的哈密顿量写成为 $H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$, 定义如下的算符

符

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega x + ip) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (m\omega x - ip) \end{cases}$$

求 (1) 证明 $[a, a^\dagger] = 1$ 。(4分)

(2) 利用 a 和 a^\dagger 表示 H 。(4分)

(3) 基态满足 $a\psi_0 = 0$, 求基态波函数 ψ_0 和基态能量。(7分)

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & a & b \\ a^* & E_2 & c \\ b^* & c^* & E_3 \end{bmatrix}, \quad \text{且 } |a| \ll 1, |b| \ll 1, |c| \ll 1,$$

5. (20分) 设一量子体系的哈密顿量为: 利用微扰法计算二级近似下的能量本征值。

6. (15分) 设氢原子中的两个电子都处于 $1s$ 态, 两个电子基态的空间波函数为 $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2)$, 求

(i) 写出电子四个可能的自旋波函数;

(ii) 写出两个电子交换反对称的总波函数 (同时考虑空间自由度和自旋自由度)。

2014年杭州师范大学721量子力学考研真题

考试科目代码： 721

考试科目名称：量子力学

一、简答题（每题10分，共40分）

1. 简述量子测量公设的基本内容。
2. 扫描隧道显微镜（STM）利用了何种量子效应？简述其工作原理。
3. 请简要解释“完备力学量组”概念，并列举三组描述氢原子的完备力学量组。
4. 分别写出两电子体系自旋单态与三重态在无耦合表象基矢下的展开式。

二、证明题（每题15分，共30分）

1. 角动量算符定义为 $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$,

(1) 利用基本对易关系，证明 $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$;

(2) 进一步证明 $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$ ，其中 $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ 为角动量升降算符。

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB)$$

$$\text{Tr}(S^\dagger AS) = \text{Tr}A$$

2. 证明对于任意算符 A, B, C, \dots 及么正变换 S ，有

并由此说明算符的迹不因表象而异。

三、计算题（每题20分，共80分）

1. 一粒子位于一维方势阱 $V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \leq 0 \text{ or } x \geq a \end{cases}$ 中，求其本征能谱与本征态。

2. 已知一维谐振子哈密顿为： $H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$ ，其本征波函数记为 $\psi_n(x)$ 构成完备基（满足正交归一关系）。定义下降算符与上升算符分别为

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x + ip) \quad \text{与} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x - ip)$$

，并满足

$$a\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x); a^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x), \quad \text{在状态 } \psi_n(x) \text{ 下，求：}$$

(1) 势能的平均值；

- (2) 动能的平均值；
- (3) 坐标与动量的不确定关系；
- (4) 最小不确定度对应什么状态（即n的取值）。

3. 求算符 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ 的归一化本征态，其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为Pauli矩阵， \mathbf{n} 为指向 (θ, φ) 方向的单位矢量

4. 对于原子序数较大的类氢原子，其最外层电子感受到的势场为

$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \lambda a_B \frac{e^2}{r^2}$ ，其中 $\lambda \ll 1$ 为一正常数， $a_B = \frac{\hbar^2}{me^2}$ 为Bohr半径，求其基态能量的一阶微扰修正。

(注：氢原子基态能量为 $E_1^{(0)} = -\frac{e^2}{2a_B}$ ，基态波函数为 $\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B}$) .

2013年杭州师范大学722量子力学考研真题

考试科目代码： 722

考试科目名称： 量子力学

一、简答题（每题20分，共40分）

1. 波函数 $\psi(\vec{r}, t)$ 是应该满足什么样的自然条件？ $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ 的物理含义是什么？写出波函数 $\psi(\vec{r}, t)$ 所满足的薛定谔方程。若势能不含时，试推导出所满足的定态薛定谔方程？假设定态薛定谔方程给出能量本征值是量子化的，从定态方程的解构造出含时薛定谔方程的一般解。

2. 简要说明何为定态非简并微扰论（写出其二级近似能量与一级近似波函数）及其适应范围与条件；并简要说明变分法的原理。

二、证明题（每题15分，共30分）

$$[p_x, f(x)] = -i\hbar \frac{d}{dx} f(x);$$

1. 证明坐标算符与动量算符之间的运算关系：

$$[p_x^2, x^2] = -4\hbar^2 x \frac{\partial}{\partial x} - 2\hbar^2.$$

2. 定义算子 $a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x + ip)$, $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x - ip)$ 以及 $\hat{N} = a^\dagger a$ 。

证明 (1) $[a, a^\dagger] = 1$;

(2) $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$, $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ 。

三、计算题（每题20分，共80分）

1. 质量为 m 的粒子在一维无限深方势阱中运动，势阱可表示为：

$$V(x) = \begin{cases} 0; & x \in (0, a) \\ \infty; & x < 0, x > a \end{cases}$$

(1) 求解能量本征值 E_n 和归一化的本征函数 $\psi_n(x)$;

(2) 若已知 $t=0$ 时, 该粒子状态为: $\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x))$, 求 t 时刻该粒子的波函数;

(3) 求 t 时刻测量到粒子的能量分别为 E_1 和 E_2 的几率是多少?

(4) 求 t 时刻粒子的平均能量 \bar{E} 和平均位置 \bar{x} 。

2. 已知一维谐振子哈密顿为: $H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]$, 其本征波函数记为 $\psi_n(x)$ 构成完备基 (满足正交归一关系)。定义下降算符与上升算符分别为

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x + ip) \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x - ip)$$

与

$a\psi_n(x) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x); a^\dagger\psi_n(x) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x)$, 在状态 $\psi_n(x)$ 下, 求:

(1) 势能的平均值;

(2) 动能的平均值;

(3) 坐标与动量的不确定关系;

(4) 最小不确定度对应什么状态 (即 n 的取值)。

3. 设已知在 \hat{L}^2 和 \hat{L}_z 的共同表象中, 算符 \hat{L}_x 和 \hat{L}_y 的矩阵分别为

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \frac{\sqrt{2}\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

求 (1) 它们的本征值和归一化的本征函数;

(2) 从 z 表象到 x 表象以及从 z 表象到 y 表象的么正矩阵;

(3) 用求得的对应的么正矩阵将 L_x 和 L_y 对角化。

4. 考虑两个电子组成的系统。它们空间部分波函数在交换电子空间部分坐标时可以是 对称的或是反对称的。由于电子是费米子, 整体波函数在交换全部坐标变量 (包括空间部分和自旋部分) 时必须是反对称的。总自旋算符定义为: $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$ 。

(1) 假设空间部分波函数是反对称的, 求对应自旋部分波函数; \bar{S}^2 和 \bar{S}_z 的本征值;

(2) 假设空间部分波函数是对称的, 求对应自旋部分波函数; \bar{S}^2 和 \bar{S}_z 的本征值。

2012年杭州师范大学719量子力学考研真题

考试科目代码： 719

考试科目名称：量子力学

一、填空题（每空2.5分，共25分）

- 量子力学中力学量算符必须是_____算符，以保证它的本征值为_____数。
对一个力学量进行测量时，所得到的测量值肯定是_____当中某一个，测量结果一般是不确定的，除非体系处于_____。测量结果的不确定性来源于_____。
两个力学量同时具有确定值的条件是_____。
- 自由粒子平面波波函数 $\psi(x) = ce^{ikx}$ ，则该自由粒子的动量不确定度 $\Delta p =$ _____，坐标不确定度 $\Delta x =$ _____。
- 根据德布罗意波粒二象性，能量为E，动量为p 的微观粒子，与对应的波动的频率 ν 和波长 λ 的关系式分别是 _____， _____。

二、简答题（每题5分，共30分）

- 写出含时薛定谔方程，当时势能与时间无关时，导出定态薛定谔方程。假设定态薛定谔方程给出能量本征值是量子化的，从定态方程的解构造出含时薛定谔方程的一般解。
- 叙述量子力学中的测不准原理，以动量和坐标为例给出具体测不准关系式。
- 叙述量子力学中物理量算符的性质以及与力学量测量值之间的关系。
- 叙述（或者通过变换关系式描述）你对量子力学中的表象变换的理解。
- 电子的自旋角动量有什么特点？
- 叙述全同粒子波函数的性质。

三、计算题（95分）

- （16分）设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases}$$

中运动，

- 求：（1）. 求解粒子能量本征值及对应的状态波函数。（6分）
（2）. 粒子在一维空间的几率分布函数。（5分）

(3). 在第n个能量激发态上, 证明 $\bar{x} = \frac{a}{2}, \bar{p} = 0$. (5分)

$$\psi(r, \theta, \varphi) = c_1 R_{21}(r) Y_{00}(\theta, \varphi) + c_2 R_{31}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) + c_3 R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$$

2. (15分) 设氢原子处于状态

式中 c_1, c_2, c_3 为已知常数, 且 $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$

求: (1) 求可能测到氢原子能量值及其测量到的几率。(5分)

(2) 轨道角动量平方 \hat{L}^2 的可能值, 可能值出现的几率以及 \hat{L}^2 的平均值。(5分)

(3) z 分量 \hat{L}_z 的可能值, 可能值出现的几率以及 \hat{L}_z 的平均值。(5分)

3. (10分)

(1) 证明 $[AB, C] = A[B, C] - \{A, C\}B, [A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$,

式中花括号为反对易关系式, 如: $\{A, B\} = AB + BA$. (5分)

(2) 证明 $\varphi_1 = y + iz, \varphi_2 = z + ix, \varphi_3 = x + iy$ 分别是下面三个角动量分量算符的本征态, 本征值为 \hbar .

$$l_x = -i\hbar(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}), l_y = -i\hbar(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}), l_z = -i\hbar(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}), \quad (5分)$$

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

4. (16分) 设有一算符 \hat{a} 具有性质, $\hat{a}^2 = 0, \{\hat{a}, \hat{a}^+\} = \hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a} = 1$, 求证:

(1) $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ 是一个厄密算符;

(2) $\hat{N}^2 = \hat{N}$

(3) \hat{N} 的本征值为0或者1

(4) $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} Kx^2$$

5. (18分) 一维谐振子的哈密顿为

假设它处在基态, 若在加上一个弹性力作用 $H' = \frac{1}{2} bx^2$, 试用微扰论计算 H' 对能量的一级和二级修正, 并与严格解比较。

[记谐振子的基态: $\psi_0^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}$; 公式: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{\frac{3}{2}}}$;

$$x^2 \psi_k^{(0)} = \frac{1}{2\alpha^2} \{ \sqrt{k(k-1)} \psi_{k-2}^{(0)} + (2k+1) \psi_k^{(0)} + \sqrt{(k+1)(k+2)} \psi_{k+2}^{(0)} \}$$

6. (20分) 两个自旋为1/2, 质量为m的无相互作用的全同费米子处在线性谐振子势场中。

计算体系的基态和第一激发态的能量本征值和本征函数(同时考虑空间自由度和自旋自由度), 指出简并度。已知单粒子能级及本征函数(空间部分)分别为

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega \quad \text{和} \quad \psi_n(x).$$

2011年杭州师范大学726量子力学考研真题

考试科目代码： 726

考试科目名称： 量子力学

一、填空题（每空3分，共30分）

1. 写出含时薛定谔方程_____。

2. 完成位置和动量的对易关系： $[x, \hat{p}_x] = \underline{\hspace{2cm}}$ ，其位置动量不确定关系的公式是_____。

3. 量子力学中力学量算符必须是_____算符，以保证它的本征值为_____数。

4. 设 $\psi_{nlm}(r, \theta, \phi)$ 设为氢原子的能量本征函数，完成下列积分：

$$\int_V \psi_{nlm}^* \hat{L}_z \psi_{nlm} d\tau = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \int_V \psi_{nlm}^* \hat{L}^2 \psi_{nlm} d\tau = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 玻色子和费米子自旋的特点是_____，费米子服从_____统计，玻色子服从_____统计。

二、简答题（每题5分，共30分）

1. 叙述你对量子力学中微观波粒二象性概念的理解。

2. 叙述量子力学中物理量与厄米算符关系以及厄米算符与力学量测量值之间的关系。

3. 当量子体系的势能与时间无关时，从薛定谔方程出发推导出定态薛定谔方程。

4. 量子力学中微观粒子的状态对应希尔伯特（Hilbert）空间的一个矢量，叙述量子力学中的表象变换在希尔伯特空间对应什么？

5. 电子的自旋角动量有什么特点？在 S_z 表象中，写出自旋角动量三个分量的矩阵表示。

6. 什么是全同粒子，叙述全同粒子波函数的性质。

三、计算题（90分）

1. （15分）设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases}$$

中运动，

求：（1），求坐标的几率分布和几率最大的位置（4分）；

（2），证明 $\bar{x} = \frac{a}{2}$ （4分）；

(3), 证明 $(\Delta x)^2 = \frac{a^2}{12} \left(1 - \frac{6}{n^2 \pi^2}\right)$ (4分);

(4), 求动量的平均值 \bar{p} (3分)

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) - \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{11}(\theta, \varphi) - \frac{1}{\sqrt{2}} R_{21}(r) Y_{1,-1}(\theta, \varphi)$$

2. (10分) 设氢原子处于状态

求: (1) 氢原子能量及其几率。(4分)

(2) 轨道角动量平方 \hat{L}^2 的可能值, 可能值出现的几率。(4分)

(3) z 分量 \hat{L}_z 的可能值, 可能值出现的几率以及 \hat{L}_z 的平均值。(2分)

3. (10分) 证明: (1) $\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x})$ 是厄米算符: (5分), (2) $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = i$ 。(5分)

4. (15分) 角动量的定义 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, 其中 \vec{r}, \vec{p} 都是算符, 并且有 $L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$ 。证明如下的对易关系

(1) $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$, $[L_y, L_z] = i\hbar L_x$, $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$; (5分)

(2) $[L^2, \vec{L}] = 0$; (5分)

(3) $[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}$ 。(5分)

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} \varepsilon & a & 2a \\ a & \varepsilon & 3a \\ 2a & 3a & \varepsilon \end{pmatrix}$$

5. (20分) 设一量子体系的Hamilton量为 $H = H_0 + H'$ 其中:

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad 0 < a \ll 1, \quad E_1 \neq E_2 \neq E_3$$

求在二级近似下的能量本征值。

6. (20分) 设氦原子中的两个电子处于 $1s2p$ 态, 两个电子的空间波函数分别为 $\psi_{100}(\vec{r}_1)$ 和 $\psi_{210}(\vec{r}_2)$ 。

(i) 写出电子两个可能的空间波函数和四个可能的自旋波函数;

(ii) 写出两个电子交换反对称的总波函数 (同时考虑空间自由度和自旋自由度)。

2010年杭州师范大学716量子力学考研真题

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

- 求：(1) 求归一化常数 A 。(4分)
 (2) 求期望值 $\langle x \rangle$ 。(3分)
 (3) 求动量期望值 $\langle p \rangle$ 。(3分)
 (4) 求期望值 $\langle x^2 \rangle$ 。(3分)
 (5) 求动量期望值 $\langle p^2 \rangle$ 。(3分)
 (6) 求坐标 x 和动量 p 的不确定值，并与测不准关系进行比较。(6分)
2. 一维谐振子的哈密顿量写成为 $H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$ ，定义如下的算符

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x + ip) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(m\omega x - ip) \end{cases}$$

- 求 (1) 证明 $[a, a^\dagger] = 1$ 。(4分)
 (2) 利用 a 和 a^\dagger 表示 H 。(4分)
 (3) 基态满足 $a\psi_0 = 0$ ，求基态波函数 ψ_0 和基态能量。(12分)
3. 设氢原子处于状态

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2} R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \varphi),$$

- 求：(1) 氢原子能量及其几率。(4分)
 (2) 轨道角动量平方 \hat{L}^2 的可能值，可能值出现的几率。(4分)
 (3) z 分量 \hat{L}_z 的可能值，可能值出现的几率以及 \hat{L}_z 的平均值。(4分)
4. 证明：(1) 厄密算符的本征值是实数。(6分) (2) $\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i$ 。(6分)
5. 设一体系未受微扰作用时有两个能级： E_{01} 及 E_{02} ，现在受到微扰 \hat{H}' 的作用，微扰矩阵元为 $H'_{12} = H'_{21} = a$ ， $H'_{11} = H'_{22} = b$ ； a 、 b 都是实数。用微扰公式求能量至二级修正值。并严格求解，然后和微扰论结果比较。(14分)
6. 一体系由三个全同的玻色子组成，玻色子之间无相互作用。玻色子只有两个可能的单粒子态。问体系可能的状态有几个？它们的波函数怎样用单粒子波函数构成？(10分)

2009年杭州师范大学715量子力学考研真题

杭 州 师 范 大 学

2009 年招收攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目代码： 715

考试科目名称： 量子力学

- 说明：1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；
4、
5、

一、填空题（每空 3 分共 60 分）

- 量子力学中力学量算符必须是_____算符，以保证它的本征值为_____数。对量子体系某一个力学量进行测量时，所测到的值肯定是_____中的某一个，测量结果一般是不确定的，除非体系处于_____。测量结果的不确定性来源于_____。两个力学量同时具有确定值的条件是_____。
- 在量子力学中，一个力学量是否守恒取决于该力学量是否与体系_____对易，而与体系所处的_____无关；一个力学量是否具有确定值只取决于体系的_____，于力学量是否守恒_____关。
- 量子力学中的薛定谔方程的形式为_____，定态薛定谔方程为_____，从定态的解出发构造薛定谔方程的一般解的表达形式为_____。
- 量子力学中若采用 A 表象，指的是取力学量算符 A 的_____作为希尔伯特空间的基矢量，任何态矢量可以按这个基矢量_____；任何其他力学量算符在此表象中可以表示成_____。
- 自旋为整数的粒子称为_____自旋为半整数的粒子称为_____它们分别服从_____统计和_____统计。

二、计算题（90 分）

1. 设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases}$$

中运动，(1)，粒子能量的本征值本征函数以及概率分布函数（8 分）；(2)，若在此

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

系统下粒子的状态波函数为 $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{3\pi x}{a}$, 求在此状态下能量的可能值和相应的几率。(8分)

2. 设 $|nlm\rangle$ 为氢原子的能量为 E_n 的定态波函数, l, n 分别为角量子数和磁量子数, 当氢原子处于状态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|100\rangle + \sqrt{2}|210\rangle + \sqrt{2}|211\rangle + \sqrt{3}|21-1\rangle)$$

求氢原子此时能量、角动量平方和角动量 z 分量的可能值, 这些可能值出现的几率和这些力学量的平均值。(18分)

3. 设一量子体系的 Hamilton 量为 H :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求静态能量的本征值和本征矢量(等价于求解矩阵 H 的本征值和本征矢量)(14分)。

4. 已知 $(\sigma \cdot \hat{A})(\sigma \cdot \hat{B}) = \hat{A} \cdot \hat{B} + i\sigma \cdot (\hat{A} \times \hat{B})$, 其中 \hat{A} 和 \hat{B} 是与 Pauli 矩阵 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 对易的任意两个矢量算符。试证明:

$$(1) (\sigma \cdot \hat{p})^2 = \hat{p}^2 \quad (6分); \quad (2) (\sigma \cdot \hat{L})^2 = \hat{L}^2 - \hbar\sigma \cdot \hat{L} \quad (6分)$$

5. 设一量子体系的 Hamilton 量为 $H = H_0 + H'$, 其中:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2\varepsilon & 3\varepsilon \\ 2\varepsilon & \varepsilon & 2\varepsilon \\ 3\varepsilon & 2\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$0 < \varepsilon \ll 1, E_1 \neq E_2 \neq E_3$, 求在二级近似下的能量本征值。(15分)

6. 一个量子力学体系具有下列单粒子能量本征态:

$$\varphi_a(x), \varphi_b(x), \varphi_c(x) \dots; \text{ 对应能级 } e_a < e_b < e_c < \dots$$

两个无相互作用粒子置于该体系中, 在以下两种情况下求出该两粒子体系的基态和第一激发态的能量本征值和本征函数, 指出简并度。

- (1) 两个自旋为 $1/2$ 的可区分粒子 (8分),
 (2) 两个自旋为 $1/2$ 的全同粒子 (7分)。

2008年杭州师范大学715量子力学考研真题

杭州师范大学

2008 年招收攻读硕士研究生入学考试题

考试科目代码: 715

考试科目名称: 量子力学

- 说明: 1、命题时请按有关说明填写清楚、完整;
2、命题时试题不得超过周围边框;
3、考生答题时一律写在答题纸上, 否则漏批责任自负;
4、
5、

一, 填空题 (每空 3 分共 51 分)

- 量子力学中力学量对应_____算符, 此算符的本征值为_____数。对量子体系某一个力学量进行测量时, 所测到的值肯定是_____中的某一个, 测量结果一般是不确定的, 除非体系处于_____。
- 设两力学量算符 \hat{A}, \hat{B} 满足对易关系 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, 则力学量 A 和 B 的测不准关系式为_____。
- 量子力学中的薛定谔方程的形式为_____, 定态薛定谔方程为_____, 从定态的解出发构造薛定谔方程的一般解的表达形式为_____。
- 设一个二能级体系的两个能量的本征值分别为 E_1 和 E_2 , 相应的本征矢量分别为 $|n_1\rangle$ 和 $|n_2\rangle$ 。则在能量表象中, 体系的哈密顿量算符的矩阵表示是_____, 体系的一般状态是_____, 在此状态下能量的可能测量值为_____, 相应的几率是_____。
- 量子力学中处理弹性散射问题时能量较低时一般使用_____近似方法, 能量较高时一般使用_____近似方法。
- 玻色子和费米子自旋的特点是_____, 费米子服从_____统计, 玻色子服从_____统计。

二, 计算题 (99 分)

- 设粒子在一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x < 0, x > a \end{cases}$$

中运动, (1), 求坐标的几率分布和几率最大的位置 (5 分);

杭州师范大学硕士研究生入学考试命题纸

(2), 证明 $\bar{x} = \frac{a}{2}$ (5分);

(3), 证明 $(\Delta x)^2 = \frac{a^2}{12} \left(1 - \frac{6}{n^2 \pi^2}\right)$ (5分);

(4), 求动量的平均值 \bar{p} (5分).

2, 设 $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为氢原子的能量为 E_n 定态波函数, 当 $t=0$ 时氢原子处于状态

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{10}} (2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1})$$

求氢原子此时能量、角动量平方和角动量 z 分量的可能值, 这些可能值出现的几率和这些力学量的平均值。(18分)

3, 设一电子在沿 x 方向的均匀磁场 B 中运动, 在 $t=0$ 时, 电子的自旋向 z 轴正方向极化, 求任意时刻 t , 电子的自旋波函数。

[提示: 电子自旋磁矩与外磁场相互作用 Hamilton 量可写为

$$H = \omega \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{|e|B}{2m_e c} \quad]。 (18分)$$

4, 设一量子体系的 Hamilton 量为 $H = H_0 + H'$, 其中:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$a, b \ll 1$, 且 $|\frac{b}{E_2 - E_1}| \ll 1$, 求在二级近似下的能量本征值, 并于精确解比较。

(14分)

5, 二维各项同性谐振子体系的 Hamilton 量可以表示为

$$H = (a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 + 1) \hbar \omega, \quad \text{其中 } a_i^+ a_i \quad (i=1, 2), \text{ 是粒子的产生和湮灭算子, 满足对易关系: } [a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0。 \text{ 该系统的角动量算子可表示为}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}(a_2^+ a_1 + a_1^+ a_2), \quad J_2 = \frac{i}{2}(a_2^+ a_1 - a_1^+ a_2), \quad J_3 = \frac{1}{2}(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2),$$

计算对易关系: $[H, J_i]$ 和 $[J_i, J_j]$ ($i, j=1, 2, 3$)。 (14分)

6, 一个量子力学体系具有下列单粒子能量本征态:

$$\psi_a(x), \psi_b(x), \psi_c(x) \cdots; \quad \text{对应能级 } E_a < E_b < E_c < \cdots$$

两个无相互作用的电子置于该体系中, 求出该两电子体系的基态和第一激发态的能量本征值和本征函数, 指出简并度。(15分)。

2007年杭州师范学院715量子力学考研真题

考试科目代码： 715

考试科目名称： 量子力学

一、简答题（每题6分共48分）

1. 什么是微观粒子的波粒二象性？写出动量为 p 的微观粒子的德布罗意波长的表达式。
2. 写出量子力学薛定谔方程，什么情况下薛定谔方程求解可以转化为定态薛定谔方程求解，写出定态薛定谔方程，并从定态薛定谔方程的解出发构造出薛定谔方程一般解的表达形式。
3. 叙述量子力学的基本原理（或者说量子力学的基本假设）、（正确写出4条或4条以上给6分，少于4条每条1.5分）。
4. 量子力学中力学量用厄米算符表示，那么力学量的测量值与力学量对应的厄米算符有什么关系。证明厄米算符的本征值为实数。
5. 电子的自旋角动量有什么特点？无外场情况下类氢原子光谱的精细结构是由什么引起的？
6. 叙述量子力学中的表象的概念，在一个有分立本征值的力学量表象中，任意量子力学状态和任意力学量用什么表示。设两个表象之间的变换矩阵为么正矩阵 S ，写出两表象之间态矢量和力学量对应的矩阵的变换关系。
7. 量子力学中处理弹性散射问题常用的两种方法是什么方法，并说明两种方法的优缺点。
8. 叙述玻色子和费米子各服从什么统计规律？这两类粒子的自旋各有什么特点？

二、计算题102分

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq l \\ \infty, & |x| \geq l \end{cases}$$

1. 质量为 m 的粒子处于长度为 l 的一维盒子中

求解粒子的能级和对应的波函数。（20分）

2. 求解一维谐振子处在第一激发态时概率最大的位置。（18分）

[提示：一维谐振子第一激发态波函数表达式为：

$$\psi_1(x) = 2\alpha \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} x e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}, \text{ 其中 } \alpha = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}, \mu \text{ 为谐振子质量。}$$

]

3. 设 $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为氢原子的能量为 E_n 定态波函数, 设 t 时刻氢原子处于状

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{5}}{4} \psi_{100} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} - \frac{1}{2} \psi_{210} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} + \frac{\sqrt{7}}{4} \psi_{311} e^{-\frac{iE_3 t}{\hbar}},$$

态

求氢原子此时能量、角动量平方和角动量 z 分量的可能值, 这些可能值出现的几率和这些力学量的平均值。(18分)

4. 在某表象中, 一量子力学体系的哈密顿算符对应的矩阵为:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

求解 H 的本征值; (2) 求各本征值对应的归一化本征态。(16分)

5. 一个量子体系的哈密顿量为 $H = H_0 + H'$, 其中:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix}, \quad H' = \begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ \alpha^* & b & \delta \\ \beta^* & \delta^* & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \text{ 为很小的实数,}$$

$|\alpha|^2 \ll 1, |\beta|^2 \ll 1, |\delta|^2 \ll 1$ 。试利用微扰法计算该量子体系的能量的1, 2级修正值。(16分)

6. 考虑在一维无限深势阱 ($0 < x < a$) 中运动的两个电子体系, 略去电子之间的相互作用以及一切与自旋有关的相互作用, 求体系的基态和第一激发态的能量和波函数。(14分)

2006年杭州师范学院量子力学考研真题

杭 州 师 范 学 院

2006 年攻读硕士学位研究生入学考试题

学科专业： 凝聚态物理

研究方向： _____

考试科目： 量子力学

- 说明： 1、命题时请按有关说明填写清楚、完整；
2、命题时试题不得超过周围边框；
3、考生答题时一律写在答题纸上，否则漏批责任自负；
4、
5、

一、简答题（每题 8 分共 48 分）

1. 什么是光的波粒二象性？什么是微观粒子的波粒二象性？并举例说明。
2. 叙述量子力学中描述微观粒子状态的波函数的统计解释，并说明波函数应满足的条件。
3. 写出量子力学薛定谔方程和定态薛定谔方程，并从定态薛定谔方程的解出发构造薛定谔方程的一般解的表达形式。
4. 叙述什么是量子力学中的隧道效应。
5. 简述厄米算符的定义，并证明厄米算符的本征值为实数。
6. 设两力学量算符 \hat{A}, \hat{B} 满足对易关系 $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ ，写出力学量 A 和 B 的测不准关系式。并以坐标和动量为例说明测不准关系的物理意义。
7. 量子力学中处理弹性散射问题常用的两种方法是分波法和波恩近似，叙述两种方法的适用范围。
8. 叙述什么是玻色子什么是费米子，两类粒子各服从什么统计规律？

二、计算题 102 分

1. 一维运动的粒子处于如下波函数所描述的状态：

$$\varphi(x) = \begin{cases} Axe^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- 式中 $\lambda > 0$ ，(1) 求波函数的归一化常数 A；(2) 求粒子的概率密度分布函数；(3) 在何处发现粒子的概率最大？（21 分）

杭州师范学院研究生入学考试命题纸

2. 设 $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为氢原子的能量为 $E_n = -e^2/2an^2$ 定态波函数, 当 $t=0$ 时氢原子处于状态

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{5}}{3}\psi_{100} - \frac{1}{3}\psi_{210} + \frac{\sqrt{3}}{3}\psi_{211},$$

求氢原子此时能量、角动量平方和角动量 z 分量的可能值, 这些可能值出现的几率和这些力学量的平均值。(20 分)

3. 在某表象中, 一量子力学体系的哈密顿算符对应的矩阵为:

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},$$

其中 a、b 和 c 为已知常数, (1) 求解 H 的本征值; (2) 当 $a=4, b=2, c=1$ 时, 求各本征值对应的归一化本征态。(16 分)

4. 质量为 m 的粒子在二维无限深势井中运动, $0 \leq x, y \leq \pi$, 井内有一微扰势能,

$$V(x, y) = \lambda \cos x \cos y$$

(1), 写出 $\lambda = 0$ 时, 基态和第一激发态的能量的本征值和相应的本征函数。(10 分)

(2), λ 很小时, 求第一激发态能量 (到一级近似)。(10 分)

5. 两个自旋为 1/2, 质量为 m 的无相互作用的全同费米子处在线性谐振子势场中, 求出体系的基态和第一激发态的能量本征值和本征函数, 指出简并度。(15 分)。[单粒子能级及本征函数 (空间部分) 为:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \quad \psi_n = N_n e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots]$$

6. 在超弦尺度下空间为非对易空间, 如 2 维非对易空间不仅坐标算符 (\hat{X}, \hat{Y}) 与动量算符 (\hat{P}_x, \hat{P}_y) 不对易, 而且坐标--坐标之间以及动量--动量之间也不对易, 已知 $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{P}_x, \hat{P}_y$ 与对易空间量子力学中的坐标 (x, y) 和动量 (p_x, p_y) 之间的关系为:

$$\hat{X} = \alpha x - \frac{\theta}{2\hbar\alpha} p_y, \quad \hat{Y} = \alpha y + \frac{\theta}{2\hbar\alpha} p_x$$

$$\hat{P}_x = \alpha p_x + \frac{\bar{\theta}}{2\hbar\alpha} p_y, \quad \hat{P}_y = \alpha p_y - \frac{\bar{\theta}}{2\hbar\alpha} p_x$$

式中 $\alpha, \theta, \bar{\theta}$ 是与能量尺度有关的常数。

(1), 求出对易关系 $[\hat{X}, \hat{Y}]$ 和 $[\hat{P}_x, \hat{P}_y]$ 。(5 分)

(2), 若 $[\hat{X}, \hat{P}_x] = [\hat{Y}, \hat{P}_y] = i\hbar$, 试求三个参数 $\alpha, \theta, \bar{\theta}$ 之间满足的关系。(5 分)