

Table of Contents

[内容简介](#)

[目 录](#)

[2013年山东师范大学833量子力学考研真题](#)

[2012年山东师范大学832量子力学考研真题](#)

[2011年山东师范大学831量子力学考研真题](#)

[2010年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2009年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2008年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2007年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2006年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2005年山东师范大学量子力学考研真题](#)

目 录

[2013年山东师范大学833量子力学考研真题](#)

[2012年山东师范大学832量子力学考研真题](#)

[2011年山东师范大学831量子力学考研真题](#)

[2010年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2009年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2008年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2007年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2006年山东师范大学量子力学考研真题](#)

[2005年山东师范大学量子力学考研真题](#)

2013年山东师范大学833量子力学考研真题

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学 833

- 注意事项：1. 本试卷共3道大题（共计14个小题），满分150分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
-

一. 简述题（5题，每题6分，共30分）

1. 全同粒子有何特点？对全同粒子体系波函数有什么要求？
2. 二维、三维各向同性谐振子及一维谐振子的能级结构有何异同，并给出二维、三维各向同性谐振子能级简并度。
3. 对于力学量A与B，写出二者在任何量子态下的涨落所满足的关系，并说明物理意义。
4. 试述旋量波函数的概念及物理意义。
5. 利用 Einstein 自发辐射理论说明自发辐射存在的必然性。

二. 证明题（5题，每题8分，共40分）

1. 对于一维粒子，设 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 均为定态薛定谔方程

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

属于同一束缚态能量E的解，试证明：

$$\psi_1\psi_2' = \psi_2\psi_1'$$

2. 证明谐振子的零点能 $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ 是测不准关系 $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ 的直接结果。
3. 如果 $[\hat{A}, \hat{H}] = [\hat{B}, \hat{H}] = 0$ ，但 $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ，试证明 \hat{H} 的本征值必有简并。
4. 试证明 $\psi(xyz) = x + y + z$ 是角动量平方算符 \hat{L}^2 属于本征值 $2\hbar^2$ 的本征函数。

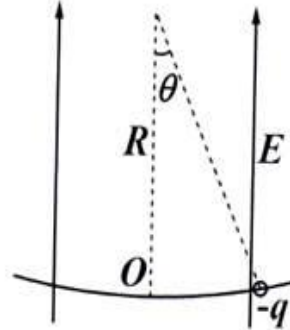
5. 已知在分波法中

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) = \frac{\sqrt{4\pi}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{2l+1} e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_{l0}(\theta),$$

据此证明光学定理。

三. 计算题 (4 题, 共 80 分)

1. (15 分) 一电量为 $-q$ 质量为 m 的带电粒子处在强度为 E 的均匀强电场中, 并被约束在一半径为 R 的圆弧上运动, 电场方向如图所示。由于电场很强, $-q$ 只能在平衡位置 O 附近振动, 即 R 远大于粒子的运动范围, 设平衡位置 O 为能量参考点, 试求体系可能的低能态能级。



2. (25 分) 考虑由两个自旋为 1 的粒子组成的体系, 总自旋 $\hat{S} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$, 求总自旋的平方及 z 分量 (\hat{S}^2, \hat{S}_z) 的共同本征态, 并表示成 \hat{s}_1 和 \hat{s}_2 本征函数乘积的线性叠加 (取 $\hbar=1$)。

3. (25 分) 一个取向用角坐标 θ 和 φ 确定的转子作受阻转动, 用下述哈密顿描述:

$\hat{H} = A\hat{L}^2 + B\hbar^2 \cos(2\varphi)$, 式中 A 和 B 均为常数, 且 $A \gg B$, \hat{L}^2 是角动量平方算符。试用一级微扰论计算系统的 p 能级 ($l=1$) 的分裂, 并算出微扰后的零级近似波函数。[提示: 必要时可使用公式 $\varphi_1 = Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}$,

$$\varphi_2 = Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad \varphi_3 = Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}]$$

4. (15 分) 设 $|n\rangle$ ($n=1,2,3,\dots$) 为一维谐振子的能量本征函数, 且已知

$$x|n\rangle = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{n+1}{2}} |n+1\rangle + \sqrt{\frac{n}{2}} |n-1\rangle \right], \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

(1) 求 $\langle m | x^2 | n \rangle$;

(2) 设该谐振子在 $t=0$ 时处于基态 $|0\rangle$, 并开始受微扰 $H' = x^2 e^{-2kt}$ 的作用 (k 为常数)。求经过充分长时间 ($t \rightarrow \infty$) 以后体系跃迁到 $|2\rangle$ 态的几率

2012年山东师范大学832量子力学考研真题

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学 (832)

- 注意事项：1. 本试卷共3道大题（共计14个小题），满分150分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
-

一. 简述题（5题，每题6分，共30分）

1. 试给出原子的特征长度的数量级（以 m 为单位）及可见光的波长范围（以 \AA 为单位）。
2. 若在 \hat{H}_0 表象中， $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ ， \hat{H}_0 与 \hat{H}' 的矩阵分别为

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^6 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}' = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

是否可以将在 \hat{H}' 看作微扰项，而利用非简并微扰理论求解 \hat{H} 的本征值与本征态？

3. 若算符 \hat{A} 、 \hat{B} 均与算符 \hat{C} 对易，即 $[\hat{A}, \hat{C}] = [\hat{B}, \hat{C}] = 0$ ， \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 是否可同时取得确定值？为什么？并举例说明。
4. 自由粒子的动量和能量是否为守恒量？为什么？
5. 试述全同性原理及全同粒子系波函数的基本性质。

二. 证明题（5题，每题8分，共40分）

1. 设 $\psi(x)$ 是定态薛定谔方程对应于能量 E 的非简并解，则此解可取为实解。
2. 在一定边界条件下利用定态薛定谔方程求解体系能量本征值与变分原理等价。
3. 对于阶梯形势场 $V(x) = \begin{cases} V_1, & x < a \\ V_2, & x > a \end{cases}$ ，若 $(V_2 - V_1)$ 有限，则定态波函数 $\psi(x)$ 及其导数 $\psi'(x)$ 必定连续。

4. 已知中心力场中运动的粒子哈密顿表示为 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$, 证明中心力场中运动的粒子角动量守恒。

5. 设有两个电子, 自旋态分别为 $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$ 。证明两个电子处于自旋

单态 (S=0) 和三重态 (S=1) 的几率分别为

$$\omega_a = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}), \quad \omega_b = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2})$$

三. 计算题 (4 题, 共 80 分)

1. (15 分) 设一维自由粒子的初态为 $\psi(x,0) = e^{ik_0 x}$, 求 $\psi(x,t)$ 。

2. (20 分) 质量为 m 的粒子在势场 $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ Cx^2, & x > 0 \end{cases}$ ($C > 0$) 中运动。

(1) 用变分法估算粒子基态能量, 试探波函数取 $\psi(x) = Axe^{-\lambda x}$, λ 为变分参量。

(2) 它是解的上限, 还是下限? 将它同精确解比较。

(附: 积分公式 $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$)

3. (25 分) 由两个非全同粒子 (自旋均为 $\hbar/2$) 组成的体系, 设粒子间相互作用表为

$$H = A \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \quad (\text{不考虑轨迹运动}). \text{ 设 } t=0 \text{ 时 } \chi(0) = \alpha(1)\beta(2), \text{ 试求:}$$

(1) 任意 t 时刻系统的状态 $\chi(t)$;

(2) 任意 t 时刻测量系统的自旋态为 $\chi(0) = \beta(1)\alpha(2)$ 的几率;

(3) 何时两个粒子的自旋实现反转?

4. (20 分) 质量为 μ 的高能粒子被中心力势 $V(r) = Ae^{-r^2/a^2}$ ($A > 0, a > 0$) 散射, 求散射微分截面 $\sigma(\theta)$ 和总截面 σ_T 。

[提示: 可能用到的公式 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 r^2} \cos \beta r dr = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\beta^2/4\alpha^2}}{2\alpha}$ ($\alpha > 0$)]

2011年山东师范大学831量子力学考研真题

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学 (831)

- 注意事项：1. 本试卷共 3 道大题（共计 14 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草稿纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

.....
一. 简述题（5 题，每题 6 分，共 30 分）

1. 一个体系的状态可以用不同的几率分布函数来表示吗？试举例说明。
2. 以 α 和 β 分别表示自旋向上和自旋向下的归一化波函数，写出两电子体系的自旋单态和自旋三重态波函数（只写自旋部分波函数）。
3. 氢原子体系处于状态 $\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_{3,1}(r) Y_{1,1}(\theta, \varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2} R_{3,2}(r) Y_{2,-1}(\theta, \varphi)$ ，给出 L^2 和 L_z 可能取值及取值几率，并说明该状态是否是定态？为什么？。
4. 中心力场中粒子处于定态，试讨论轨道角动量是否有确定值。
5. 在质心坐标系中，设入射粒子的散射振幅为 $f(\theta)$ ，写出靶粒子的散射振幅，并分别写出全同玻色子碰撞和无极化全同费米子碰撞的微分散射截面表达式。

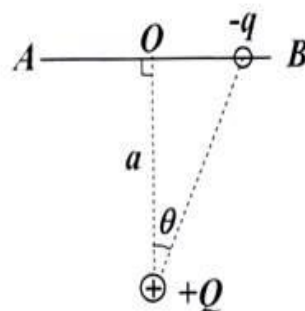
二. 证明题（5 题，每题 8 分，共 40 分）

1. 若 $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ 构成完备基组，证明： $\delta(x-x') = \sum_n \varphi_n^*(x') \varphi_n(x)$ 。
2. 一维粒子波函数 $\psi(\mathbf{x})$ 满足定态 Schrödinger 方程，若 $\psi_1(\mathbf{x})$ 、 $\psi_2(\mathbf{x})$ 都是方程的解，则有 $\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' = \text{常数}$ （与 \mathbf{x} 无关）。
3. 证明：在定态中几率流密度矢量与时间无关。
4. 设算符 $\hat{F} = \hat{A}\hat{B}$, $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$ ，若 ϕ 为 \hat{F} 的本征函数，相应的本征值为 ε ，求证 $\phi \equiv \hat{A}\phi$ 和 $\psi \equiv \hat{B}\phi$ 也是 \hat{F} 的本征函数，并求出相应的本征值。

5. 若电子处于 \hat{S}_z 的本征态。试证在此态中, \hat{S}_y 取值 $\hbar/2$ 或 $-\hbar/2$ 的概率各为 $1/2$ 。

三. 计算题 (4 题, 共 80 分)

1. (15 分) 如图所示, 一电量为 $-q$ 质量为 m 的带电粒子处在电量为 $+Q$ 固定点电荷的强电场中, 并被约束在一直线 AB 上运动, $+Q$ 到 AB 的距离为 a , 由于 $+Q$ 产生的电场很强, $-q$ 只能在平衡位置 O 附近振动, 即 a 远大于粒子的运动范围, 设平衡位置 O 为能量参考点, 试求体系可能的低能态能级。



2. (25 分) 自旋 $s = \frac{1}{2}$, 并具有自旋磁矩 $\hat{M} = \mu_0 \hat{S}$ 的粒子处于沿 x 方向的均匀磁场 B 中。

已知 $t=0$ 时, 粒子的 $s_z = \frac{\hbar}{2}$, 求在以后任意时刻发现粒子具有 $s_y = \pm \frac{\hbar}{2}$ 的几率。

3. (25 分) 一个取向用角坐标 θ 和 φ 确定的转子作受阻转动, 用下述哈密顿描述:

$\hat{H} = A\hat{L}^2 + B\hbar^2 \cos(2\varphi)$, 式中 A 和 B 均为常数, 且 $A \gg B$, \hat{L}^2 是角动量平方算符。试用一级微扰论计算系统的 p 能级 ($l=1$) 的分裂, 并算出微扰后的零级近似波函数。

[提示: 必要时可使用公式 $\varphi_1 = Y_{11}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$,

$$\varphi_2 = Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad \varphi_3 = Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}]$$

4. (15 分) 以 $\psi = e^{-\alpha x^2}$ 为变分函数, 式中 α 为变分参数, 试用变分法求一维谐振子的基态能量和波函数。

[提示: 可能用到的公式 $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp[-\alpha x^2] dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$]

2010年山东师范大学量子力学考研真题

山东师范大学
二〇一〇年硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共五道大题（共计13个小题），满分150分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
-

一. 简要回答下列问题. (30分, 每题6分)

1. 叙述定态与守恒量的特点。
2. 以 α 和 β 分别表示自旋向上和自旋向下的归一化波函数，写出两电子体系的自旋单态和自旋三重态波函数（只写自旋部分波函数）。
3. 表象变换对算符、波函数、算符本征值、力学量取值几率及平均值有什么影响？
4. 波函数的统计诠释对微观体系波函数有哪些要求？
5. 写出泡里矩阵。

二. 证明题(40分, 每题10分)

1. 证明不显含时间且与体系哈密顿量对易的力学量在任意态中的平均值不随时间变化。
2. 证明在体系的任何状态下，其厄米算符的平均值必为实数。
3. 证明任何力学量算符在自身表象中的表示是对角矩阵。
4. 已知 $L^2|lm\rangle = l(l+1)\hbar^2|lm\rangle$, $L_z|lm\rangle = m\hbar|lm\rangle$, $L_- = L_x + iL_y$, 试利用角动量算符的对易关系证明 $L_-|lm\rangle$ 也是 L_z 的本征函数，即证明：
$$L_z L_-|lm\rangle = (m+1)\hbar L_-|lm\rangle$$

三. 计算题(30分, 每题15分)

1. 已知宽为 L 的一维无限深势阱体系, $V(x) = \begin{cases} 0 & L \leq x \leq 2L \\ \infty & x < L \text{ or } x > 2L \end{cases}$, 求该体系的本征能量和相应本征波函数。

2. 设哈密顿量 $H = H_0 + H'$, 其中 $H_0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $H' = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, 若 $c \ll 1$,

应用微扰理论求 H 的本征值 (准确到二级近似)。

四. 计算题(20分)

已知在 s_z 表象中, $s_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 求:

(1) s_x 的本征值和所属本征函数。

(2) s_z 表象到 s_x 表象的变换矩阵 (即将 s_x 对角化的变换矩阵)。

五. 计算题(30分)

已知一维谐振子体系的势能为 $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, 其能量本征态满足关系

$$x \psi_n(x) = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{n}{2}} \psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \psi_{n+1}(x) \right], \text{ 其中 } \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},$$

在 $t=0$ 时, 体系处于状态 $\Phi(x) = A \alpha^2 x^2 \psi_1(x)$ 中, 其中 A 为归一化系数。

(1) 在 $t=0$ 时, 求体系能量的可能取值、取值几率及平均值。

(2) 在 $t=0$ 时, 求体系势能的平均值。

(3) 在 $t=t_0$ 时, 求体系所处状态的波函数。

(4) 在 $t=t_0$ 时, 求体系能量的可能取值、取值几率及平均值。

2009年山东师范大学量子力学考研真题

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共 2 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
- *****

一、简答题（共 7 小题，每题 10 分，共 70 分）

1. 由波函数是否可以确定微观粒子的轨道？为什么？
2. 若两个算符不对易，它们是否可能同时有确定值？为什么？
3. 在 (x, y, z) 表象中，写出力学量 (x, y, p_z) 的共同本征函数（设它们的本征值分别为 x', y', p_z' ）。
4. 写出带电 q 的粒子在电磁场矢势 \vec{A} ，标势 φ 中的薛定谔方程。
5. 证明厄米算符平方的平均值为正。
6. 证明在定态中几率流密度矢量与时间无关。
7. 证明氢原子的任何定态 $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ 中，动能的平均值等于该定态能量的负值，即 $\langle \hat{p}^2 / 2\mu \rangle_{nlm} = -E_n$

二、计算题（4 小题，共 80 分）

1. (25 分) 设 $t=0$ 时，质量为 m 、频率为 ω 的谐振子处于

$$\psi(x, 0) = Ae^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \left[(\cos \beta) H_0(\alpha x) + \frac{\sin \beta}{2\sqrt{2}} H_2(\alpha x) \right]$$

状态，其中 A, β 是实常数， $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2}$ ， $H_n(\alpha x)$ 是厄米多项式。

- (1) 求归一化常数 A 。
- (2) 求 t 时刻体系的状态 $\psi(x, t)$ 。
- (3) 求 t 时刻位置的平均值 $\bar{x}(t)$ 。
- (4) 求谐振子能量取值及相应几率。

2. (20 分) 有一粒子, 其哈密顿算符为 H_0 , 现加一微扰 H' , H_0 和 H' 的矩阵形式为

$$H_0 = A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H' = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 写出 H_0 的本征能量与相应波函数
- (2) 求能量的一级近似和波函数的零级近似
3. (15 分) 设粒子处于状态 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 求轨道角动量 L_x 和 L_y 的平均值, 并计算 L_x 和 L_y 的不确定关系 $\Delta L_x \Delta L_y$ 。
4. (20 分) 试用玻恩近似公式计算库仑散射的微分截面 $\sigma(\theta)$, 库仑势为 $V(r) = \frac{\alpha}{r}$, 入射粒子质量为 μ , 速度为 v , α 为实数。

[提示: 必要时可用积分公式 $\int_0^{\infty} \sin qr dr = \frac{1}{q}$]

2008年山东师范大学量子力学考研真题

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共 2 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
-

一、简答题（共 7 小题，每题 10 分，共 70 分）

1. 一维自由粒子波函数 $\psi(x) = \delta(x)$ 是否定态波函数？为什么？
2. 对于力学量 A 与 B ，写出二者在任何量子态下涨落所满足的关系。
3. 一维动量表象中，写出坐标和动量的算符形式和它们本征函数表达式。
4. 什么是量子力学中的守恒量？它有什么特性？
5. 证明宇称算符的本征函数非奇即偶。
6. 一维体系的哈密顿算符具有分立谱，证明该体系的动量在能量本征态中的平均值等于零。
7. 中心力场中，粒子的哈密顿算符为 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$ ，试证明角动量是守恒量。

二、计算题（4 小题，共 80 分）

1. （20 分）质量为 m 的粒子处于宽度为 a 的一维无限深势阱中，设 $t=0$ 时粒子的状态为 $\Phi(0) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4$ ， $\varphi_i (i=1,2,3,4)$ 是能量为 E_i 时一维无限深势阱的归一化本征函数， $c_i (i=1,2,3,4)$ 是已知的常数。求：
 - (1) $t=0$ 时测量能量结果小于 $3\pi^2\hbar^2/(ma^2)$ 的几率
 - (2) $t=0$ 时能量 E 和 E^2 的平均值
 - (3) t 时刻的波函数 $\Phi(t)$
 - (4) 如果在 Φ 态测量能量，所得结果为 $8\pi^2\hbar^2/(ma^2)$ ，问测量后粒子处在何种状态？

2. (20分) 原子中两态之间电偶极跃迁几率同两态之间电偶极矩平方成正比。

已知氢原子波函数 $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 取玻尔半径 $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ 为长度单位,

则:

$$R_{10} = 2e^{-r}, R_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} (2-r)e^{-r/2}, R_{21} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}} e^{-r/2};$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

(1) 试算出 $n=2$ 的所有矩阵元 $\langle \psi_{nlm} | z | \psi_{100} \rangle$;

(2) 结合你的计算结果, 讨论这种矩阵元所涉及的有关 $\Delta l, \Delta m$ 的选择定则 (不考虑自旋)。

3. (20分) 设一个定域电子处于沿 z 轴方向的均匀弱磁场 \vec{B} 中 (不考虑电子的

轨道运动), 电子的内禀磁矩为 $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{\mu c} \vec{s}$ 。设 $t=0$ 时电子处于 $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

求 t 时刻所处的状态 $\psi(t)$ 及测得电子自旋在 z 方向的投影为 $\hbar/2$ 的几率。

4. (20分) 质量为 μ 的粒子在一维势场 $V(z) = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ Gz, & z > 0 \end{cases}$ 中运动, 式中 $G > 0$ 。

(1) 用变分法计算基态能量时, 在 $z > 0$ 区域内的试探波函数应取下列波函数中的哪一个? 为什么?

$$(a) z + \lambda z^2 \quad (b) e^{-\lambda z^2} \quad (c) ze^{-\lambda z} \quad (d) \sin \lambda z$$

(2) 算出基态能量。

[提示: 必要时可利用积分公式: $\int_0^{\infty} z^n e^{-\alpha z} dz = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$]

2007年山东师范大学量子力学考研真题

山东师范大学 硕士研究生入学考试试题

考试科目：量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共 2 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
-

一、简答题（共 7 小题，每题 10 分，共 70 分）

1. 写出一个合格的波函数所应具备的条件。
2. 自由粒子的动量和能量是否为守恒量？为什么？
3. 中心力场中粒子能级的简并度至少为 $2l+1, l=0,1,2,\dots$ ，对吗？为什么？
4. 若两个算符不对易，它们是否可能同时有确定值？为什么？
5. 证明对于非简并情况，厄米算符属于不同本征值的本征函数相互正交。
6. 对于 δ 势垒 $V(x)=\gamma\delta(x)$ ，试给出并证明 δ 势中 $\psi'(x)$ 的跃变条件。
7. 证明等式 $e^{i\sigma_y\theta} = \cos\theta + i\sigma_y \sin\theta$ (σ_y 为泡利矩阵 z 分量)。

二、计算题（4 小题，共 80 分）

1. (15 分) 一质量为 m 的粒子原本处于如下无限深势阱的基态

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0, x > b \\ 0 & 0 < x < b \end{cases}$$

今把阱壁由 $x=b$ 移至 $x=2b$ 处，求

- (1) 粒子处于新势阱基态中的几率。
 - (2) 粒子保持能量未变的几率以及能量比原有基态中的更大的几率各是多少？
2. (20 分) $t=0$ 时氢原子的波函数为

$$\psi(r,0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1})$$

忽略自旋和跃迁。

- (1) 写出系统能量、角动量平方 L^2 及角动量 z 分量 L_z 的可能测值（表示成基本物理量的函数即可）。
- (2) 上述物理量的可能测值出现的几率和期望值。
- (3) 写出 t 时刻的波函数。

3. (25分) 设体系的 Hamilton 量为 $H = \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 频率 ω 是实常数。

(1) 求体系能量的本征值和本征函数。

(2) 如果 $t=0$ 时体系处于 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 状态, 求 $t>0$ 时体系所处的状态。

(3) 如果 $t=0$ 时体系处于基态, 当一个小的与 t 有关的微扰 $H' = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ 在 $t=0$ 时加上后, 求 $t \rightarrow \infty$ 时体系跃迁到激发态的几率。

4. (20分) 对于一维谐振子, 取基态试探波函数形式 $\exp(-\lambda x^2)$, λ 为参数, 用变分法求基态能量, 并与严格解比较。

(提示: 如有必要, 可用公式

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}, \quad \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}, \quad a>0)$$

2006年山东师范大学量子力学考研真题

山东师范大学
2006 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共 5 道大题（共计 10 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内，不得带走，否则以违纪论处。
-

1. (30 分) 在 \hat{H}_0 表象中 \hat{H} 的矩阵为

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 & a \\ 0 & E_2^{(0)} & b \\ a^* & b^* & E_3^{(0)} \end{pmatrix}$$

其中 $E_i^{(0)} (i=1,2,3)$ 为实数,且 $|a|,|b|$ 比 $E_i^{(0)}$ 小得多。

- (1) 写出 \hat{H}_0 的本征能量与相应波函数
- (2) 试用微扰论求能量至二级近似。

2. (30 分) 不考虑电子的空间运动, 电子的哈密顿量为

$$\hat{H} = 3\varepsilon\sigma_z + 4\varepsilon\sigma_x, \text{ 其中 } \varepsilon \text{ 为大于零的常数, } \sigma_z \text{ 和 } \sigma_x \text{ 为泡利矩阵}$$

- (1) 求 \hat{H} 的本征能量与相应本征函数
- (2) 已知 $t=0$ 时电子处于 $\sigma_z = \hbar/2$ 的态, 求 t 时刻
 - (a) 电子波函数
 - (b) 能量平均值
 - (c) 电子处于 $\sigma_z = \hbar/2$ 的态的几率

3. (30 分) 设体系处于态 $\psi = C_1 Y_{11} + C_2 Y_{10}$ ($|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$). 求

- (1) L^2 的可能值, 相应几率及平均值
- (2) L_z 的可能值, 相应几率及平均值
- (3) L_x 的可能值及相应几率

4. (30 分) 以下两题任选一题

(1) 在一维无限深势阱 ($0 \leq x \leq a$) 中运动的质量为 m 的粒子处于基态, 某时刻, 势阱宽度突然由 a 变为 $2a$ 。求粒子处在新势阱基态中的几率。

(2) 用 Born (玻恩) 近似法求粒子在势场

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

中的微分散射截面。

5. (30 分) 完成下列各题

- (1) 在有心力场中, 粒子处于定态, 轨道角动量是否有确定值? 为什么?
- (2) 力学量守恒应满足什么条件? 写出三维自由运动粒子的两组守恒量完全集。
- (3) 一体系的哈密顿量 \hat{H} 与时间 t 无关, 则体系一定处于定态。此说法是否正确? 为什么?
- (4) 厄米算符 \hat{A} 满足 $\hat{A}^4 = 1$, 则 \hat{A} 的本征值为 $\pm 1, i, -i$ 。此说法是否正确? 为什么?
- (5) 写出 $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = ?$

2005年山东师范大学量子力学考研真题

山东师范大学
2005 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 量子力学 (C 卷)

- 注意事项: 1. 本试卷共 5 道大题 (共计 10 个小题), 满分 150 分;
2. 本卷属试题卷, 答题另有答题卷, 答案一律写在答题卷上, 写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁, 不要在试卷上涂划;
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题, 其它均无效。
4. 考试结束后将本卷装入试题袋内, 不得带走, 否则以违纪论处。
-

1. (40 分) 质量为 μ 的粒子在二维无限深势阱

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi \\ \infty, & \text{其它} \end{cases}$$

中运动, 若附加一势场 $V_1(x, y) = \lambda \cos x \cos y$

- (1) 求 $\lambda = 0$ 时粒子的能量和波函数
(2) 在 λ 很小但不为零时, 求第一激发态能量至 λ 项, 基态能量至 λ^2 项

$$\left(\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \right)$$

2. (30 分) \hat{S} 和 \hat{S}^2 分别为电子的自旋角动量算符和自旋角动量平方算符

- (1) 在 \hat{S}_z 和 \hat{S}^2 的共同表象中写出 $\hat{S}^2, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ 的矩阵形式
(2) 电子处于 $S_z = \hbar/2$ 的状态中测量 S_x 所得可能值及相应几率

3. (30 分) 内禀磁矩为 $\hat{\mu}_s = -e\hat{S}/(\mu c)$ 的电子 (\hat{S} 为电子的自旋角动量算符),

处在磁场 $\vec{B} = (B_0 \cos \omega t, B_0 \sin \omega t, B)$ 中, 电子内禀磁矩与磁场的相互作用为 $-\hat{\mu}_s \cdot \vec{B}$, 常数 $B_0 \ll B$ 。若 $t=0$ 时, 电子自旋沿正 z 方向, 问 $t=t_0$ 时电子跃迁到负 z 方向的几率是多少?

4. (20 分) 质量为 μ 的高速运动粒子被中心势

$$V(r) = A \exp(-\alpha r^2) \quad (A > 0, \alpha > 0)$$

所散射。用 Born(玻恩)近似法求微分散射截面和总散射截面。

$$\text{公式: } \cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad \int_0^{\infty} \exp(-ax^2) \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$$

5. (30 分) 完成下列各题

(1) 描写全同 Fermi (费米) 子体系和全同 Bose (玻色) 子体系的波函数具有怎样的对称性?

(2) 质量为 μ 的粒子在势阱 $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2, & x > 0 \end{cases}$ 中运动, 写出其能量

表达式

(3) 什么实验可以说明电子具有波动性?

(4) Planck (普朗克) 假设的内容是什么?

(5) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 为泡利矩阵, 写出 $\sigma_x \sigma_y \sigma_z = ?$