Table of Contents

目　录

第一部分　哈尔滨工业大学量子力学考研真题

2007年哈尔滨工业大学433量子力学考研真题

哈尔滨工业大学

二OO七年硕士研究生考试试题

考试科目：量子力学　　　考试科目代码：[433]

适用专业：粒子物理与原子核物理、原子与分子物理、凝聚态物理、光学。

考生注意：答案务必写在答题纸上，并标明题号。答在试题上无效。

题号	一	二	三	四	五	六								总分
分数	50	20	20	20	20	20								150

一、（50分）完成下列问题

1. 写出量子力学的五个基本原理的名称。
2. 写出你所知道的对称性、相应的守恒量和不可观测量。
3. 说明德布罗意假说的内容，写出德布罗意关系式。
4. 写出不确定关系式，说明其物理内涵。
5. 说明波函数 $\psi(\vec{p},t)$ 的模方 $|\psi(\vec{p},t)|^2$ 的物理意义，它的量纲是什么？$\vec{p}$ 为动量。
6. 当哈密顿算符与时间无关时，写出薛定谔方程，给出该方程通解的表达式。
7. 分别说明定态、束缚态、简并态、厄米算符、幺正算符的定义。
8. 对于两个自旋皆为 $\frac{\hbar}{2}$ 的全同粒子，给出耦合表象与非耦合表象波函数的关系。
9. 写出角动量升降算符 $\hat{J}_\pm$ 作用到 $\hat{J}^2$ 与 $\hat{J}_z$ 的共同本征态 $|jm\rangle$ 上的结果。
10. 对于正交归一完备本征函数系 $\{|n\rangle\}$，写出封闭关系。$\sum_n |n\rangle\langle n|$

二、（20分）一个质量为 m 的粒子，在阱宽为 a 的一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x\le 0,\ x\ge a\\ 0, & 0<x<a\end{cases}$$

中运动，当 $t=0$ 时，已知粒子处于状态

$$\psi(x,0)=\frac{1}{2}\varphi_1(x)-\frac{1}{4}\varphi_2(x)+\frac{1}{4}\varphi_3(x)$$

考题 P64 一．

其中 $\varphi_n(x)$ 为粒子的第 n 个本征态。

（1）求 $t=0$ 时粒子能量的取值概率；

（2）求 $t>0$ 时粒子的波函数 $\psi(x,t)$；

（3）求 $t>0$ 时粒子能量的取值概率。

三、（20 分） 一个质量为 m 的粒子，在如下势场中运动

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0, x>b\\ 0, & 0\le x\le a\\ V_0, & a<x<b\end{cases}$$

哈题 P22 三

导出束缚态能级所满足的超越方程。其中 V_0 为具有能量量纲的正数。

$E>V_0$

$E<V_0 \longrightarrow E>0$ 求解 $\longrightarrow$ $E>V_{min}$ $E<V_{max}$

四、（20 分） 设质量为 μ 的粒子的哈密顿算符 $\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2\mu}+V(x)$，已知 $\hat{H}|n\rangle=E_n|n\rangle$，

试证明：

(1) $(p_x)_{mn}=\frac{\mu}{i\hbar}(E_n-E_m)x_{mn}$

哈题集 P47 四

(2) $\sum_n (E_m-E_n)^2|x_{mn}|^2=\frac{\hbar^2}{\mu^2}(p_x^2)_{mm}$

(3) $\sum_n (E_m-E_n)|x_{mn}|^2=\frac{\hbar^2}{\mu}\left[x\frac{d}{dx}V(x)\right]_{mm}$

五、（20 分） 自旋为 $\frac{\hbar}{2}$、固有磁矩为 $\hat{\mu}=\gamma\hat{s}$ 的粒子，处于 y 轴方向的均匀外磁场 $\vec{B}=B_0\vec{j}$ 中，设 $t=0$ 时，粒子处于 $s_x=\frac{\hbar}{2}$ 的状态，求出 $t>0$ 时的波函数，进而计算 $\bar{s}_x$ 与 $\bar{s}_z$ 的平均值。B_0，γ 为实常数。

哈题 P41 三

六、（20 分） 一个质量为 μ、角频率为 ω_0 的线谐振子，受到微扰 $\hat{W}=\beta x^2$ 的作用，

(1) 用微扰论求出能量的一级修正；

(2) 求出能量的严格解，并与（1）的结果比较。

量子力学 P149 三

提示：在线谐振子基底之下，坐标算符的矩阵元为

$$\langle m|x|n\rangle=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{m,n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{m,n+1}\right]$$

式中，

$$\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega_0}{\hbar}}$$

$\langle m|x^2|n\rangle$

$=\sum_k \langle m|x|k\rangle\langle k|x|n\rangle$

$=\frac{1}{\alpha^2}\sum_k[\ldots]$

$=\frac{1}{2\alpha^2}[\ldots]$

$=\frac{1}{2\alpha^2}[\sqrt{n(n-1)}\delta_{m,n-2}+(2n+1)\delta_{m,n}+\sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{m,n+2}]$

2004年哈尔滨工业大学433量子力学考研真题

哈尔滨工业大学

二OO四年硕士研究生考试试题

考试科目：量子力学　　考试科目代码：[433]
适用专业：粒子物理与原子核物理专业、凝聚态物理专业、光学专业
考生注意：答案务必写在答题纸上，并标明题号。答在试题上无效。

题号														总　分
分数														150分

一、(40分) 回答下列问题

1、简述运动粒子的波动—粒子两象性。

2、波函数$\psi(\vec{r},t)$是用来描述什么的？它应该满足什么样的自然条件？$|\psi(\vec{r},t)|^2$的物理含义是什么？

3、分别说明什么样的状态是束缚态、简并态与负宇称态？

4、物理上可观测量应该对应什么样的算符？为什么？

5、直接写出对易关系$[x,\hat{p}_z]$，并给出两者满足的不确定（测不准）关系式。

6、一个粒子处于长、宽、高分别为a、b、c的方形盒子中，设其所处的状态用波函数$\psi(x,y,z)$来描述，问该粒子处于盒子的上三分之一空间中的几率是多少？

7、已知一个哈密顿算符$\hat{H}_0$的解，即$\hat{H}_0\psi_n(x)=E_n^0\psi_n(x)$，试给出$\hat{H}=\hat{H}_0\pm V_0$的解，式中，$V_0$为实常数。

8、设有两个自由电子，已知甲电子的运动速度是乙电子的3倍，求出两者德布罗意波长之比。

二、(25分) 自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，处于宽度为a的一维非对称无限深方势阱中，设$t=0$时，粒子处于状态

$$\psi(x,0)=\frac{1}{3}\varphi_0(x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\varphi_1(x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{3}\varphi_1(x)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

求$t>0$时的波函数，能量的取值几率与平均值。$\varphi_n(x)$为该无限深方势阱的第n个本征态。

三、(25 分)　设粒子处于一维势阱之中

$$V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ -V_0, & 0\le x\le a\\ 0, & x>a\end{cases}$$

式中，$V_0>0$。导出其能量本征值 $-V_0<E<0$ 时满足的超越方程。

四、(20 分) 若一维体系的哈密顿算符 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(x)$ 不显含时间，在能量表象中证明：

(1)、　$p_{mn}=\frac{\mu}{i\hbar}(E_n-E_m)x_{mn}$

(2)、　$\sum_n (E_m-E_n)^2|x_{mn}|^2=\frac{\hbar^2}{\mu^2}(p^2)_{mm}$

五、(20 分)　自旋为 $\frac{1}{2}$、固有磁矩为 $\vec{\mu}=\gamma\vec{s}$（γ 为实常数）的粒子，处于均匀外磁场 $\vec{B}=B_0\vec{j}$ 中，设 $t=0$ 时，粒子处于 $s_z=\frac{\hbar}{2}$ 的状态，求出 $t>0$ 时的波函数，进而计算 $\hat{s}_x$ 的平均值。

六、(20 分)　一个电荷为 q、质量为 μ 和角频率为 ω 的线谐振子，受到恒定弱电场 ε 的作用，即 $\hat{W}=-q\varepsilon x$，用微扰论求其能量近似到二级修正、波函数到一级修正。

提示：　线谐振子基底之下坐标算符的矩阵元为

$$\langle m|x|n\rangle=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\delta_{m,n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\delta_{m,n+1}\right]$$

式中，　$\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$

第二部分　相关院校量子力学考研真题

2015年华南理工大学630量子力学考研真题

630

华南理工大学

2015 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：量子力学

适用专业：凝聚态物理

（本试卷共 5 大题，每题 30 分，总分为 150 分）

1．概念证明：

（1） 为什么说轨道概念是被量子力学摒弃的纯经典概念？

（2） 证明两个厄密算符之和仍为厄密算符。

（3） 假设 $\hat{Q}$ 是厄密的，α 是一个复数。在什么条件下，$\alpha\hat{Q}$ 也是厄密的？

（4） 在什么条件下两个厄密算符的乘积也是厄密的？

（5） 证明坐标算符 $(\hat{x}=x)$ 和哈密顿算符 $\left(\hat{H}=-\left(\hbar^2/2m\right)d^2/dx^2+V(x)\right)$ 是厄密算符。

2. 分析一维有限深方势阱的束缚态奇波函数。求出允许能级满足的超越方程,并用作图法求解。考虑两种极限情况，是否总是至少存在一个奇束缚态？

3. 考虑自旋为 $\frac{1}{2}$ 的系统，（1）求出算符 $A\hat{s}_y+B\hat{s}_z$ 的本征值及归一化的本征波函数。其中 $\hat{s}_y$，$\hat{s}_z$ 是角动量算符，且 A，B 是实常数。（2）假定此系统处于以上算符的一个本征态上，求测量 $\hat{s}_y$ 得到结果 $\frac{\hbar}{2}$ 的概率。

4. (a) 取以下形式的试探波函数

$$\psi(x)=\begin{cases}A\cos(\pi x/a) & (-a/2<x<a/2)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

求一维简谐振子的基态能量。a 的“最优”值是多少？对比 $\langle H\rangle_{\min}$ 与准确能量。

(b) 在区间 $(-a,a)$ 中，取 $\psi(x)=B\sin(\pi x/a)$ ，求第一激发态上限，并与准确值作对比。

5. 质量为 m 的一个粒子在一维无限深方势阱中，开始时处在基态。在 $t=0$ 时把一块“砖”丢到势阱中，因此势变成

$$V(x)=\begin{cases}V_0 & (0\le x\le a/2)\\ 0 & (a/2\le x\le a)\\ \infty & (\text{其他})\end{cases}$$

其中 $V_0\ll E_1$ ，经过时间 T 后，砖被移走，测量粒子的能量，用一级微扰理论求得到 E_2 的概率。

2014年华南理工大学630量子力学考研真题

630

华南理工大学

2014 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（试卷上做答无效，请在答题纸上做答，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：量子力学

适用专业：凝聚态物理

共　　页

公式：

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (a>0)$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-a^2x^2} dx = \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{2a}\right)^{2n+1} \quad (a>0)$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-a^2x^2} dx = \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+2} \quad (a>0)$$

（本试卷共 5 大题，每题 30 分，总分为 150 分）

1. (1) 证明在定态中，概率流与时间无关。

(2) 在一维势场中运动的粒子，势能关于原点对称：$V(-x)=V(x)$,证明粒子的定态波函数具有确定的宇称。

(3)算符 $i\dfrac{d}{dx}$ 是否是厄米算符，说明其原因。

2. 粒子从左边入射到如下势垒中，

$$V(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ V_1 & 0\le x\le a \\ V_2 & x>a \end{cases}$$

粒子的能量 E 满足 $V_2<E<V_1$，求粒子的透过率。

3. 一个质量为 m 的粒子被 $x=0,a$ 处的无限高墙限制在区间 $0<x<a$ 中运动。 初始时刻，该粒子在区间的左半部分具有相同的概率：

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}} & 0<x<\dfrac{a}{2}\\ 0 & \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}$$

(a) 求时间相关波函数 $\Psi(x,t)$。

(b) 粒子处于第 n 个本征态的概率是多少？

(c) 写出粒子能量期望值的表达式。

4. 两个自旋为 $\dfrac{1}{2}$ 的粒子间有磁矩相互作用，设它们的质量很大，动能可以忽略，$\hat{H}_0=\lambda\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2$，求该系统的能量本征值、本征函数和简并度。

5. 设在 $\hat{H}_0$ 表象中，$\hat{H}$ 的矩阵为：

$$H=\begin{bmatrix}E_1^{(0)} & 0 & a\\ 0 & E_2^{(0)} & b\\ a^* & b^* & E_3^{(0)}\end{bmatrix},\quad E_1^{(0)}<E_2^{(0)}<E_3^{(0)}.$$

用微扰法求能量的一阶和二阶修正。

2014年北京科技大学876量子力学考研真题

北　京　科　技　大　学

2014年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：　876　试题名称：　量子力学　（共　5　页）

适用专业：　物理学

说明：　所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

（一）多选题（每题2分，共40分，答案可能是一个，也可能是多个）：

【1】以下哪个波函数表示的质量为m的非相对性粒子具有较高的能量：______

A. $\cos x$

B. $\cos 2x$

C. e^{ix}

D. e^{i2x}

【2】以下哪些函数是奇函数：______

A. $A\sin kx$

B. $A\cos kx$

C.狄拉克德尔塔函数

D.狄拉克德尔塔函数的一阶导数

【3】“*”是取复共轭运算，以下算式正确的是：______

A. $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right)^{*}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{*}(x,t)$

B. $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right)^{*}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{*}(x,t)$

C. $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right)^{*}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

D. $\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\right)^{*}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$

【4】玻尔模型中，角动量量子化条件是：______

A. $mvr=n\hbar, n=0,1,2,\ldots$

B. $mvr=nh, n=0,1,2,\ldots$

C. $mvr=n\hbar, n=1,2,\ldots$

D. $mvr=nh, n=1,2,\ldots$

【5】关于厄米矩阵，以下说法正确的是：______

A.对角线上的元素必定是实数

B.非对角线上的元素必定是实数

C.对角线上的元素可以是纯虚数

D.非对角线上的元素必须包含纯虚数

【6】质量为m的粒子在宽度为L的一维无限深势阱中运动，基态能是：______

A. $\frac{h^2}{16mL^2}$

B. $\frac{h^2}{8mL^2}$

C. $\frac{h^2}{4mL^2}$

D. $\frac{h^2}{2mL^2}$

【7】质量为m的粒子在宽度为L的一维无限深势阱中运动，基态波函数是：______

A. $\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}$

B. $\sqrt{\frac{L}{2}}\sin\frac{\pi x}{L}$

C. $\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}$

D. $\sqrt{\frac{L}{2}}\sin\frac{2\pi x}{L}$

【8】对一维无限深势阱问题，解定态薛定谔方程，解出能量本征值是E_n，对应的本征函数是$\psi_n(x)$，以下哪个波函数表示的是所谓“定态”：______

A. $\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}$

B. $\psi_1(x)e^{-iE_2t/\hbar}$

C. $\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar}+\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}\right)$

【9】定义平移算符为$T(a)=e^{i\hat{p}a/\hbar}$，这里$\hat{p}$是动量算符，a是位移参数，以下说法正确的是：______

A.平移算符是厄米算符

B.平移算符是单位算符

C.平移算符是幺正算符

D.平移算符可以用来表示一个物理量

【10】以下哪些算符一定是厄米算符：______

A. 幺正算符

B. 平移算符

C. 投影算符

D. 单位算符

【11】假设$|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$是狄拉克右矢空间中的向量，以下说法正确的是：______

A. $\langle\alpha|\beta\rangle=\langle\beta|\alpha\rangle$

B. $\langle\alpha|\beta\rangle=\langle\beta|\alpha\rangle^*$

C. $|\alpha\rangle\langle\beta|=|\beta\rangle\langle\alpha|$

D. $\langle\alpha|\alpha\rangle\geq 0$

【12】假设$|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$是狄拉克右矢空间中的向量，以下哪些是算符：______

A. $\langle\alpha|\beta\rangle$

B. $\langle\beta|\alpha\rangle$

C. $|\alpha\rangle\langle\beta|$

D. $|\beta\rangle\langle\alpha|$

【13】假设$|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$是狄拉克右矢空间中的向量，c_1，c_2是复系数，$|\alpha\rangle=c_1|\alpha\rangle+c_2|\beta\rangle$，以下哪些等式成立：______

A. $\langle\alpha|=c_1\langle\alpha|+c_2\langle\beta|$

B. $\langle\alpha| = c_1^*\langle\alpha| + c_2^*\langle\beta|$

C. $\langle\alpha| = c_1|\alpha\rangle + c_2|\beta\rangle$

D. $\langle\alpha| = c_1^*|\alpha\rangle + c_2^*|\beta\rangle$

【14】假设A是算符，但不一定是厄米算符，$|\alpha\rangle$，$|\beta\rangle$是狄拉克右矢空间中的向量，以下哪些等式成立：______

A. $\langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\beta|A|\alpha\rangle$

B. $\langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\beta|A|\alpha\rangle^*$

C. $\langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\beta|A^+|\alpha\rangle$

D. $\langle\alpha|A|\beta\rangle = \langle\beta|A^+|\alpha\rangle^*$

【15】L_z表象下，对$l=0$的量子态，以下说法正确的是：______

A. L_x，L_y同时取确定值

B. L_x的取值是完全不确定的

C. L_y的取值是完全不确定的

D. L^2的期望值是0

【16】自旋的泡利矩阵表示，以下哪些是厄米矩阵：______

A. $\hat{\sigma}_x$

B. $\hat{\sigma}_y$

C. $\hat{1}$

D. $\hat{\sigma}^+$

【17】自旋的泡利矩阵表示，哪些是幺正矩阵：______

A. $\hat{\sigma}_x$

B. $\hat{\sigma}_y$

C. $\hat{1}$

D. $\hat{\sigma}^+$

【18】线性谐振子的占有数表象，$a^\dagger$，a分别是产生和湮灭算符，以下哪些是厄米算符：______

A. $a^\dagger$

B. a

C. $a^\dagger a$

D. $aa^\dagger$

【19】线性谐振子的占有数表象，$a^\dagger$，a分别是产生和湮灭算符，以下哪些算式成立：______

A. $[a, a^\dagger a] = a$

B. $[a, a^\dagger a] = -a$

C. $[a^\dagger, a^\dagger a] = a^\dagger$

D. $[a^\dagger, a^\dagger a] = -a^\dagger$

【20】以下哪些态矢量表示的是“自旋三重态态”：______

A. $|++\rangle$

B. $|--\rangle$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle+|-+\rangle\right)$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle-|-+\rangle\right)$

（二）简答题（每题5分，共50分）：

【1】在狄拉克记号下，$|p'\rangle$的物理含义是什么？

【2】对一维空间，$\langle x'|p'\rangle$的数学表达式是什么？

【3】请写出在位置表象下，位置算符和动量算符的表达式：

【4】请写出在动量表象下，位置算符和动量算符的表达式：

【5】假设x, p分别是位置算符，动量算符，请证明：$[x^n, p]=i\hbar nx^{n-1}$

【6】对厄米算符A，假设有本征值问题$A|a'\rangle=a'|a'\rangle$，请证明a'一定是实数。

【7】假设A，B是厄米算符，$[A,B]\neq 0$，请写出严格的不确定关系。

【8】假设A，B是厄米算符，请证明：$\frac{1}{2i}(AB-BA)$一定是厄米算符。

【9】请写出(L^2, L_z)的共同本征态$|l,m\rangle$所满足的共同本征值问题；对l, m的取值有何限制？

【10】质量为m的非相对论粒子在势场V中运动，请写出相应的含时薛定谔方程。请继续写出粒子流密度$\vec{j}$的表达式和粒子数守恒的微分形式的表达式。

（三）计算和证明（每题10分，共60分）：

【1】两个全同电子在宽度为L的一维无限深势阱中运动，考虑电子的自旋，假设电子的质量是m，单电子在一维无限深势阱中的能量本征值是$E_n, n=1,2,\dots$，n=1是基态，n=2是第一激发态，……，忽略“电子-电子”间相互作用，（1）系统的基态能是多少？（2）第一激发态的能量本征值是多少？（3）假设$\psi_n(x)$是与E_n相对应的电子轨道部分的波函数，请写出系统的基态波函数。（提示：写成轨道部分和自旋部分乘积的形式）

【2】氢原子的波函数可表示为：$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)\chi(s_z)$，这里主量子数$n$的取值范围是？角动量量子数$l$的取值范围是？磁量子数$m$的取值范围是？自旋量子数$s_z$的取值范围是？并请证明对主量子数$n$简并度$f_n = 2n^2$。

【3】对于(L^2, L_z)的共同本征态$|lm\rangle$，证明：（1）$\langle L_x\rangle=\langle L_y\rangle=0$；（2）$\langle L_x^2\rangle=\langle L_y^2\rangle$；（3）对$L_x, L_y$验证满足不确定关系。

【4】自旋泡利矩阵，$\hat{\sigma}_z$表象下，对$\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$，求解本征值问题，即求出$\hat{\sigma}_y$对应的本征值和本征向量，假设量子态$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$，求对此量子态观测到$s_y=\hbar/2$的几率。

【5】氢原子基态波函数的径向部分是Ae^{-r/a_0}，（1）求归一化因子A；（2）当r=？时，径向部分的概率分布达到最大。

【6】两个自旋1/2耦合，哈密顿量是：$H=J\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2+\gamma\left(\hat{S}_1^z+\hat{S}_2^z\right)$，假设$J>0$，$\gamma=J\hbar$，求系统的基态能和基态波函数。

2013年北京科技大学876量子力学考研真题

北　京　科　技　大　学

2013年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：　876　试题名称：　量子力学　（共　5　页）

适用专业：　物理学

说明：　所有答案必须写在答题纸上，做在试题或草稿纸上无效。

一、多选题（每题2分，共40分）

（1）x和p分别是量子力学中的位置算符和动量算符，以下哪些算符可以用来表示力学量？（_______）

A. xp

B. px

C. $\frac{px+xp}{2}$

D. $\frac{xp+2px}{3}$

（2）以下哪些对易关系成立？（_______）

A. $[x,p]=0$　B. $[x,p]=i\hbar$　C. $[x,y]=0$　D. $[p_x,p_y]=0$

（3）以下关于自旋的说法哪些是正确的？（_______）

A.自旋量子数必须是整数　B.自旋量子数可以是整数

C.自旋量子数可以是半整数　D.自旋可以看作是粒子的自转运动

（4）以下哪些实验说明电子存在自旋？（______）

A.正常塞曼效应　B.反常塞曼效应　C.斯塔克效应　D.斯特恩-盖拉赫实验

（5）L_z表象下，已知角动量量子数$l=0$，以下说法哪些是正确的？（______）

A. L_x的取值是确定的，为0；　B. L_x的取值是不确定的，可能取$0,\pm\hbar,\pm2\hbar,\cdots$；

C. L_z的取值是确定的，为0；　D. L^2的取值是确定的，为0；

（6）氢原子的第一玻尔半径是？（______）

A.0.01nm　B.0.05nm　C.0.1nm　D.0.5nm

（7）氢原子的电离能是多少？（______）

A. 511keV　B.13.6eV　C.6.8eV　D.4.9eV

（8）可见光波长是大概什么数量级的？（______）

A.几$\mathring{A}$　B.几纳米（nm）　C.几十纳米　D.几百纳米

（9）假设A是算符，但不一定是厄米的，$|\beta\rangle = A|\alpha\rangle$，以下哪些等式成立？（______）

A. $\langle\beta| = \langle\alpha|A$　B. $\langle\beta| = \langle\alpha|A^\dagger$　C. $\langle\alpha|A|\alpha\rangle = \langle\alpha|A^\dagger|\alpha\rangle$

D. $\langle\alpha|A|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|A^\dagger|\alpha\rangle$

（10）以下哪些算符是厄米算符？（______）

A. L^+　B. L^-　C. L^2　D. L_z

（11）以下哪个态矢量表示的是“自旋单态”？（______）

A. $\left|++\right\rangle$ B. $\left|--\right\rangle$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+-\right\rangle+\left|-+\right\rangle\right)$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+-\right\rangle-\left|-+\right\rangle\right)$

（12）关于费米子，以下哪些陈述成立？（______）

A.电子是费米子 B.自旋是半整数的粒子是费米子

C.费米子满足泡利不相容原理 D.光子是费米子

（13）以下哪些等式成立？（______）

A. $a\left|n\right\rangle=\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle$ B. $a^{\dagger}\left|n\right\rangle=\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle$

C. $a\left|n\right\rangle=\sqrt{n-1}\left|n-1\right\rangle$ D. $a^{\dagger}\left|n\right\rangle=\sqrt{n}\left|n+1\right\rangle$

（14）两电子系统的波函数可表示为$\psi\left(r_1,r_2\right)\cdot\chi\left(s_{1z},s_{2z}\right)$的形式，$\psi$是轨道部分波函数，$\chi$是自旋部分波函数。以下哪些说法正确？（______）

A.如果ψ是交换对称的话，那么χ就是交换反对称的；

B.如果ψ是交换反对称的话，那么χ就是交换对称的；

C.如果ψ是交换对称的话，那么χ就是交换对称的；

D.如果ψ是交换反对称的话，那么χ就是交换反对称的；

（15）以下哪些算符是厄米算符？（______）

A.产生、湮灭算符 $a^{\dagger}$和a B.数算符 $a^{\dagger}a$

C. $\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^{\dagger}\right)$ D. $i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(a^{\dagger}-a\right)$

（16）以下哪些可表示线性谐振子的哈密顿量？（______）

A. $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}$ B. $H=\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ C. $H=\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{x}$ D. $H=\frac{p^2}{2m}+kx$

（17）以下哪些哈密顿量存在能级简并？（______）

A. $\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} E_0 & \Delta \\ \Delta & E_0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$

（18）以下哪些算式成立？（______）

A. $\lambda=\frac{h}{p}$ B. $\lambda=\frac{p}{h}$ C. $p=\frac{h}{\lambda}$ D. $p=\frac{\lambda}{h}$

（19）以下哪些算式成立？（______）

A. $\langle x|x'\rangle=\delta(x-x')$ B. $\langle x|x'\rangle=\delta(x'-x)$ C. $\langle x|x'\rangle=1$ D. $\langle x|x'\rangle=0$

（20）电子在电磁场中的哈密顿量是？（______）

A. $H=\frac{\left(\hat{p}-e\vec{A}\right)^2}{2m}+e\varphi$ B. $H=\frac{\left(\hat{p}+e\vec{A}\right)^2}{2m}+e\varphi$

C. $H=\frac{\left(\hat{p}-e\vec{A}\right)^2}{2m}-e\varphi$ D. $H=\frac{\left(\hat{p}+e\vec{A}\right)^2}{2m}-e\varphi$

（二）填空题（每空2分，共40分）：

（1）自旋的泡利矩阵表示，在σ_z表象下，请写出，单位算符$I=$______，$\sigma_x=$______，$\sigma_y=$______，$\sigma_z=$______，$\sigma^+=$______，$\sigma^-=$______。请从以上6个算符中挑选出一个厄米算符：______，一个幺正算符：______，一个既是厄米又是幺正的算符：_______，一个既不是厄米又不是幺正的算符：______。

（2）氢原子波函数可用$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)\chi(s_z)$表示，这里$n=$______，$l=$______，$m=$______，$s_z=$______，能量$E_n$的简并度是：______。

（3）把以下狄拉克右矢空间中的矢量分别映射到左矢空间中：$|\alpha\rangle\to$______，$\langle\alpha|\beta\rangle|\gamma\rangle\to$______，假设$c_1$，$c_2$是复数，$c_1|\alpha\rangle+c_2|\beta\rangle\to$______，假设$A,B$是算符，但不一定是厄米算符，$AB|\alpha\rangle\to$______，

$\sum_n|n\rangle\langle n|\alpha\rangle\to$

______。

三）计算和证明题（每题10分，共70分）

（1）请定性地画出一维线性谐振子基态，第一激发态，第二激发态，第三激发态的波函数图形。

（2）质量为m的粒子在宽度为a的一维无限深势阱中运动。能量本征值E_n，归一化本征波函数为ψ_n；若已知$t=0$时，该粒子的波函数为：$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)+\psi_2(x))$，求$t$时刻该粒子的波函数和平均位置$\langle x\rangle_t=?$

（3）设氢原子处于状态$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\varphi)-\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)$。求氢原子能量，角动量平方及角动量z分量的可能值，这些可能值出现的概率和这些力学量的平均值。

（4）请证明：$L_\pm|l,m\rangle=\hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}|l,m\pm1\rangle$。

（5）对玻色子，请计算$[a^\dagger a,a]=?$，和$[a^\dagger a,a^\dagger]=?$

（6）假设有3个全同玻色子，2个处在m态，1个处在n态，请写出系统的归一化波函数。