2020 年数一真题

一、选择题

(1) 当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中阶最高的是 (　　)

(A)$\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t$. (B)$\int_0^x\ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t$. (C)$\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t$. (D)$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则 (　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2}}=0$.

(3) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\right)\Big|_{(0,0)}$，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，则 (　　)

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{n}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在. (B) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{n}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{\alpha}\cdot(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在. (D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|\boldsymbol{\alpha}\times(x,y,f(x,y))|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在.

(4) 设 R 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，r 是实数，则 (　　)

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散时，$|r|\geq R$. (B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛时，$|r|\leq R$.

(C) 当 $|r|\geq R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 发散. (D) 当 $|r|\leq R$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}r^{2n}$ 收敛.

(5) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等列变换化成 $\boldsymbol{B}$，则 (　　)

(A) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

(B) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{A}$.

(C) 存在矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{A}$.

(D) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(6) 已知直线 $l_1:\frac{x-a_2}{a_1}=\frac{y-b_2}{b_1}=\frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $l_2:\frac{x-a_3}{a_2}=\frac{y-b_3}{b_2}=\frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点，记向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_i\\b_i\\c_i\end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，则 (　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. (B)$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示. (D)$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(7) 设 A，B，C 为三个随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$，则 A，B，C 中恰有一个事件发生的概率为 (　　)

(A)$\frac{3}{4}$. (B)$\frac{2}{3}$. (C)$\frac{1}{2}$. (D)$\frac{5}{12}$.

(8) 设 X_1，X_2，$\cdots$，X_{100} 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\le 55\right\}$ 的近似值为 (　　)

(A)$1-\Phi(1)$. (B)$\Phi(1)$. (C)$1-\Phi(0.2)$. (D)$\Phi(0.2)$.

二、填空题

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=$ ______.

(10) 设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1},\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}),\end{cases}$ 则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$ ______.

(11) 设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$，$f(0)=m$，$f'(0)=n$，则 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=$ ______.

(12) 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{xt^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$ ______.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$ ______.

(14) 设 X 服从 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布，$Y=\sin X$，则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=$ ______.

三、解答题

(15) 求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

(16) 计算 $I=\oint_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 为 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

(17) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$. 证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数.

(18) 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(1\le x^2+y^2\le 4)$ 的下侧，$f(x)$ 为连续函数. 计算

$$I=\iint\limits_{\Sigma}[xf(xy)+2x-y]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上具有连续导数，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\limits_{x\in[0,2]}|f(x)|$. 证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,2)$，使 $|f'(\xi)|\ge M$.

(II) 若对任意的 $x\in(0,2)$，$|f'(x)|\le M$，则 $M=0$.

(20) 设二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经过正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\ge b$.

(I) 求 a，b 的值.

(II) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

(21) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(I) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵.

(II) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

(22) 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\frac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$.

(I) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\varPhi(x)$ 表示.

(II) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

(23)　设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ，m 为参数且均大于零.

(I) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|T>s\}$，其中 $s>0$，$t>0$.

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验，测得它们的寿命分别为 t_1，t_2，$\cdots$，t_n，若 m 已知，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.