2018 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是( )

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$. (B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$. (D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

(2) 过点 $(1,0,0)$,$(0,1,0)$,且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为( )

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$. (B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$. (D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$ ( )

(A) $\sin 1+\cos 1$. (B) $2\sin 1+\cos 1$.

(C) $2\sin 1+2\cos 1$. (D) $2\sin 1+3\cos 1$.

(4) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$,则( )

(A) $M>N>K$. (B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$. (D) $K>N>M$.

(5) 下列矩阵中,与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为( )

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则( )

(A) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$. (B) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$.

(C) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$. (D) $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$,且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$,则 $P\{X<0\}=$ ( )

(A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5.

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,据此样本检验假设:$H_0:\mu=\mu_0$,$H_1:\mu\neq\mu_0$,则( )

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0,那么 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

二、填空题(本题共6小题,每小题4分,共24分,把答案填在题中横线上.)

(9) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$,则$k=$______.

(10) 设函数$f(x)$具有2阶连续导数.若曲线$y=f(x)$过点$(0,0)$且与曲线$y=2^x$在点$(1,2)$处相切,则$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$______.

(11) 设$\boldsymbol{F}(x,y,z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$,则$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=$______.

(12) 设L为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线,则$\oint_L xy\mathrm{d}s=$______.

(13) 设2阶矩阵$\boldsymbol{A}$有两个不同特征值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是$\boldsymbol{A}$的线性无关的特征向量,且满足$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则$|\boldsymbol{A}|=$______.

(14) 设随机事件A与B相互独立,A与C相互独立,$BC=\varnothing$.若$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$,$P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$,则$P(C)=$______.

三、解答题(本题共9小题,共94分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分10分)

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(本题满分10分)

将长为2m的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(17)(本题满分10分)

设Σ是曲面$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$的前侧,计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(18)(本题满分10分)

已知微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是$\mathbf{R}$上的连续函数.

(Ⅰ)若$f(x)=x$,求方程的通解;

(Ⅱ)若$f(x)$是周期为T的函数,证明:方程存在唯一的以T为周期的解.

(19)（本题满分 10 分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(20)（本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数.

（Ⅰ）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

（Ⅱ）求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

(21)（本题满分 11 分）

已知a是常数,且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求a；

（Ⅱ）求满足$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量X与Y相互独立，X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$服从参数为$\lambda$的泊松分布. 令$Z=XY$.

（Ⅰ）求$\mathrm{Cov}(X, Z)$；

（Ⅱ）求Z的概率分布.

(23)（本题满分 11 分）

设总体X的概率密度为

$$f(x;\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中$\sigma\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本. 记σ的最大似然估计量为$\hat{\sigma}$.

（Ⅰ）求$\hat{\sigma}$；

（Ⅱ）求$E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$.