2014 年全国硕士研究生招生考试试题

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)下列曲线中有渐近线的是(   )

(A) $y=x+\sin x$.   (B) $y=x^2+\sin x$.   (C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$.   (D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

(2)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 上(   )

(A)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$.   (B)当 $f'(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$.

(C)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant g(x)$.   (D)当 $f''(x)\geqslant 0$ 时, $f(x)\leqslant g(x)$.

(3)设 $f(x,y)$ 是连续函数,则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$(   )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$.

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(4)若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in\mathbf{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$, 则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$(   )

(A) $2\sin x$.   (B) $2\cos x$.   (C) $2\pi\sin x$.   (D) $2\pi\cos x$.

(5)行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$(   )

(A) $(ad-bc)^2$.   (B) $-(ad-bc)^2$.   (C) $a^2d^2-b^2c^2$.   (D) $b^2c^2-a^2d^2$.

(6)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维向量,则对任意常数 k,l,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的(   )

(A)必要非充分条件.   (B)充分非必要条件.

(C)充分必要条件.   (D)既非充分也非必要条件.

(7)设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A)=$(   )

(A)0.1.   (B)0.2.   (C)0.3.   (D)0.4.

(8)设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且方差均存在, X_1 与 X_2 概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$, 则(   )

(A) $E(Y_1)>E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$.   (B) $E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)=D(Y_2)$.

(C) $E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)<D(Y_2)$.   (D) $E(Y_1)=E(Y_2),D(Y_1)>D(Y_2)$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.)

(9)曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为______.

(10)设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数,且 $f'(x)=2(x-1)$,$x\in[0,2]$,则 $f(7)=$______.

(11)微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$______.

(12)设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,则曲线积分 $\oint_L z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}z=$______.

(13)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1,则 a 的取值范围是______.

(14)设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,若 $c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计,则 $c=$______.

三、解答题(本题共 9 小题,共 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定,求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$. 若 $f(0)=0$,$f'(0)=0$,求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧,计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$,$0<b_n<\frac{\pi}{2}$,$\cos a_n-a_n=\cos b_n$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(Ⅰ)证明 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$;

(Ⅱ)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(Ⅰ)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(21)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$. 在给定 $X=i$ 的条件下,随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$.

(Ⅰ)求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(Ⅱ)求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ)求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(Ⅱ)求 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}_n$;

(Ⅲ)是否存在实数 a,使得对任何 $\varepsilon>0$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\widehat{\theta}_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$?