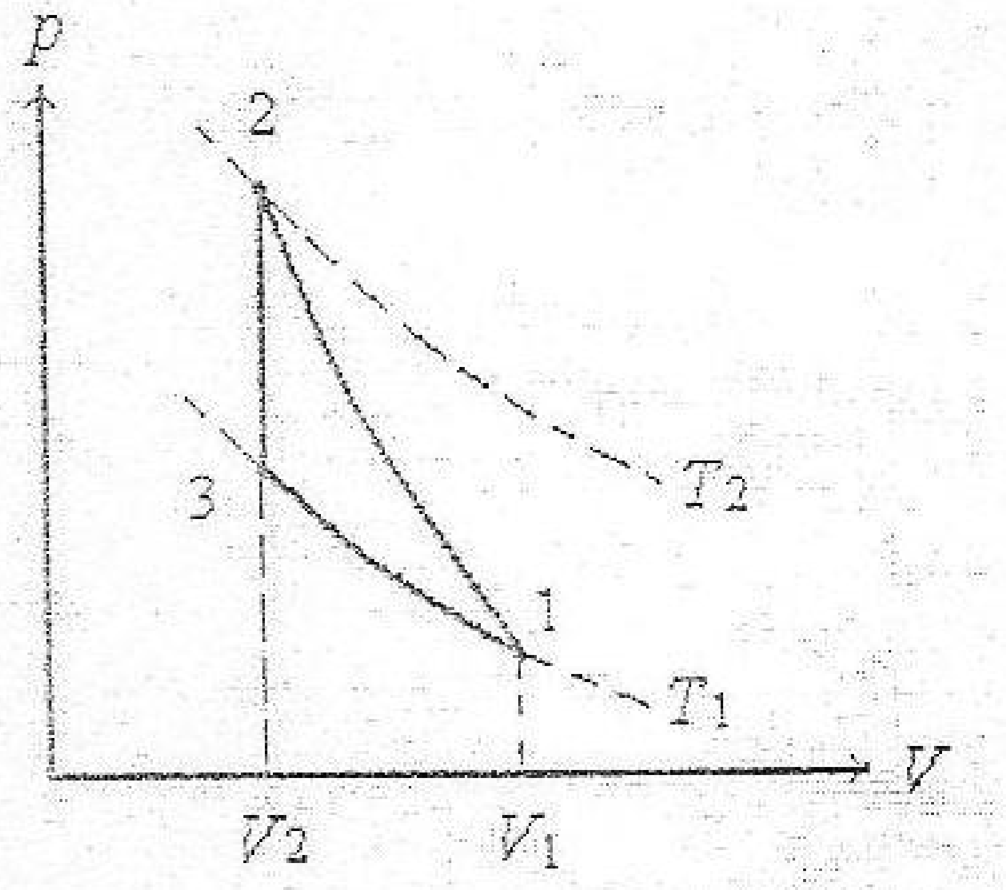
* 说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称： 热力学与统计物理

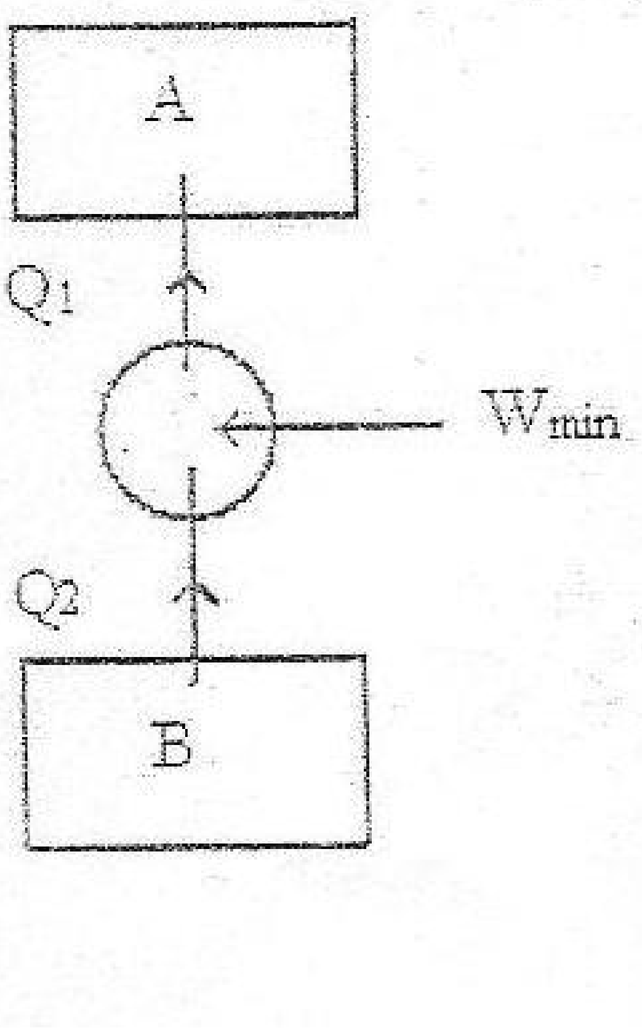
一，一理想气体经历下列循环过程：（1）经多方过程 $pV^n = C$ 由体积 V_1 变到 $V_2 = \frac{V_1}{b}$；（2）体积不变，冷却到原来的温度；（3）等温膨胀到原来的体积，（见下图），计算该气体在循环过程中所作的功与压缩过程中作的功之比。（答案中只出现 n 和 b）

[提示：在状态 1 处，既满足 $p_1V_1^n = C$，又满足 $p_1V_1 = NRT_1$]



二，有 A、B 两个物体，热容量均为 C，且与温度无关。开始两物体温度均为 T，现有一致冷机工作于两物体之间，当 B 的温度降至 A 的一半时，求此系统所做的最小功 W_{min}（见图）。

[提示：先由系统的总熵变为零，求两物体的终温。]



三，线性谐振子的能谱为$\varepsilon_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$，当系统温度足够低时，振子仅占据基态和第一激发态。求振子处于第一激发态与基态的几率之比；并计算振子的平均能量。（玻尔兹曼分布）

四，处于平衡状态的光子气体，在体积V内，温度为T，导出光子总数和能量密度的表达式，说明它们与温度的依赖关系。（玻色分布）

[提示：光子气体的化学势 $\mu=0$，光子的自旋量子数为1，自旋在动量方向上的投影可取两个可能值 $\pm\hbar$（相当于左右偏振）]

（$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}\cdot dx = 2\times1.202 = const.$； $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\cdot dx = \frac{\pi^4}{15} = const.$）

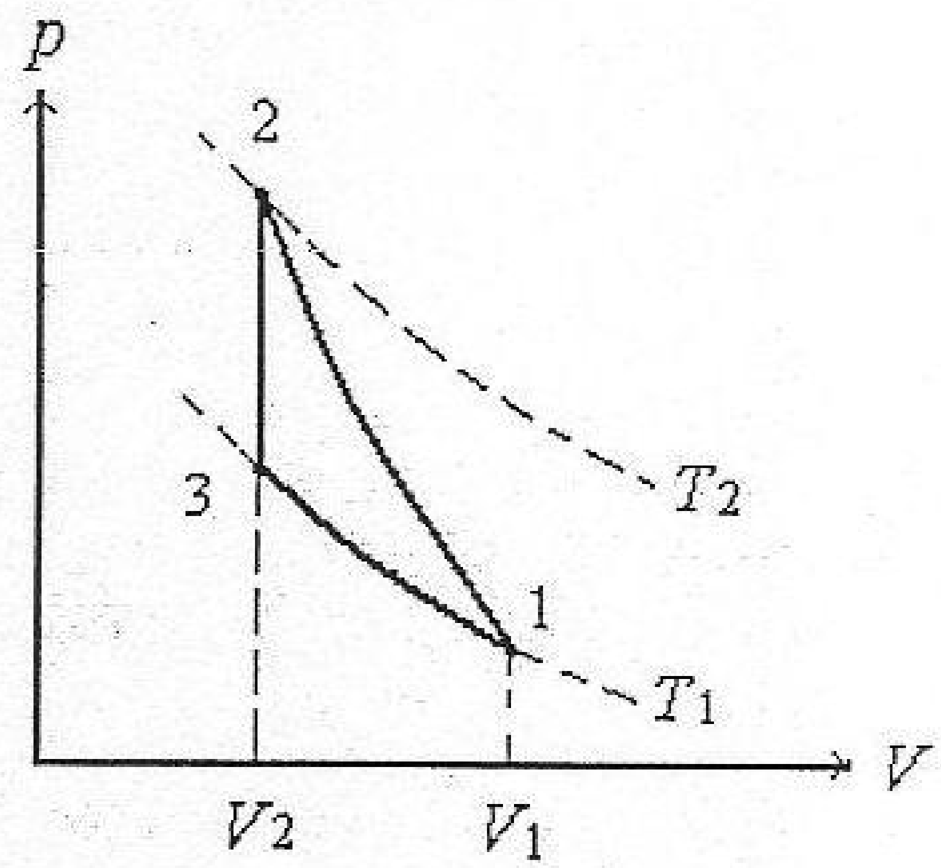
五，由N个自由电子组成的二维电子气处在面积S内，求：（1）在能量范围$\varepsilon-\varepsilon+d\varepsilon$内的量子态数；（2）$T$=0$K$时的费米能量$\varepsilon_F$；（3）$T$=0$K$时，每个电子的平均能量$\bar{\varepsilon}$。（费米分布）

（注：每题：30分，总分：150分）

科目名称：	热力学与统计物理

一，一理想气体经历下列循环过程：（1）经多方过程 $pV^n=C$ 由体积 V_1 变到 $V_2=\frac{V_1}{b}$；（2）体积不变，冷却到原来的温度；（3）等温膨胀到原来的体积，（见下图），计算该气体在循环过程中所作的功与压缩过程中作的功之比。（答案中只出现 n 和 b）

[提示：在状态 1 处，既满足 $p_1V_1^n=C$，又满足 $p_1V_1=NRT_1$]



解：1→2 为多方过程，此压缩过程中作的功为：

$$W_1=\int_{V_1}^{V_2}pdV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{C}{V^n}\cdot dV=C\cdot\left.\frac{V^{1-n}}{1-n}\right|_{V_1}^{V_2}=\frac{C}{1-n}\cdot\left(V_2^{1-n}-V_1^{1-n}\right),$$

因 $V_2=\frac{V_1}{b}$，代入上式：

$$W_1=\frac{C}{1-n}\cdot\left(V_2^{1-n}-V_1^{1-n}\right)=\frac{C}{1-n}\cdot\frac{V_1^{1-n}}{b^{1-n}}\cdot\left(1-b^{1-n}\right),$$

用 $pV^n=C$，则：$p_1V_1^n=C$，代入上式：

$$W_1=\frac{C}{1-n}\cdot\frac{V_1^{1-n}}{b^{1-n}}\cdot\left(1-b^{1-n}\right)=\frac{p_1V_1^n}{1-n}\cdot\frac{V_1^{1-n}}{b^{1-n}}\cdot\left(1-b^{1-n}\right)=\frac{p_1V_1}{1-n}\cdot\frac{1-b^{1-n}}{b^{1-n}}。$$

2→3 为等容过程，$W_2=0$。

3→1 为等温膨胀过程作的功为：$W_3=\int_{V_2}^{V_1}pdV=NRT_1\int_{V_1/b}^{V_1}\frac{dV}{V}=NRT_1\cdot\ln b=p_1V_1\cdot\ln b$

气体在循环过程中所作的功为：

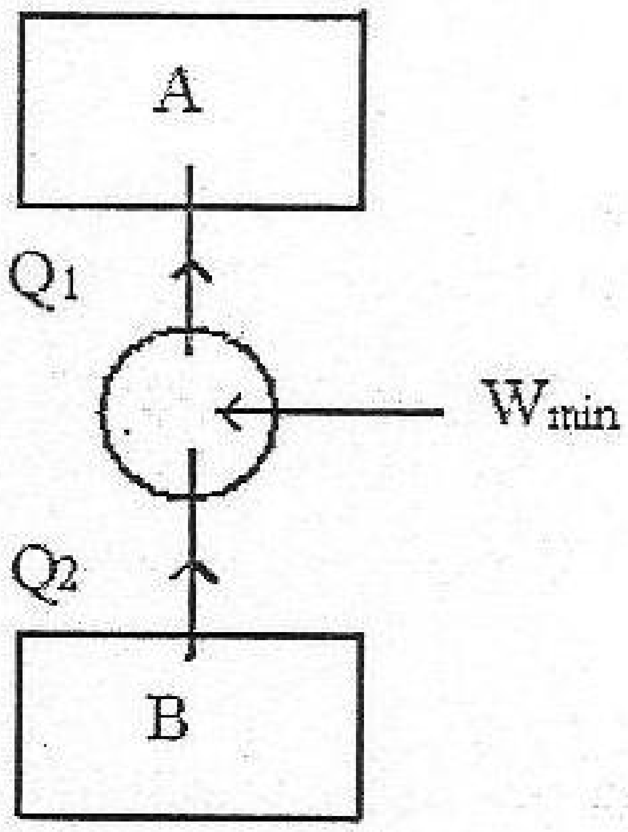
$$W = W_1 + W_2 + W_3,$$

故气体在循环过程中所作的功与压缩过程中作的功之比为：

$$\frac{W}{W_1} = 1 + \frac{W_3}{W_1} = 1 + \frac{p_1V_1 \ln b \cdot (1-n)b^{1-n}}{p_1V_1(1-b^{1-n})} = 1 - \frac{(n-1)\ln b}{b^{n-1}-1}。$$

二，有 A、B 两个物体，热容量均为 C，且与温度无关。开始两物体温度均为 T，现有一致冷机工作于两物体之间，当 B 的温度降至 A 的一半时，求此系统所做的最小功 $W_{\min}$（见图）。

[提示：先由系统的总熵变为零，求两物体的终温。]



解：要求的是最小功，所以此循环为可逆循环，系统的总熵变为零。先求出 A 和 B 各自的熵变 ΔS_A 和 ΔS_B，然后用 $\Delta S_A + \Delta S_B = 0$，求两物体的终温。

设初态的温度为 T_i，则初态时 $T_A = T_i = T$；$T_B = T_i = T$； 根据题意则有：

终态时：$T_A = 2T_f$；$T_B = T_f$。

故：
$$\Delta S_A = \int_T^{2T_f} \frac{CdT}{T} = C\ln\frac{2T_f}{T},$$

$$\Delta S_B = \int_T^{T_f} \frac{CdT}{T} = C\ln\frac{T_f}{T},$$

由 $\Delta S_A + \Delta S_B = 0$，得：

$$C\ln\frac{2T_f}{T} + C\ln\frac{T_f}{T} = 0，T_f = \frac{T}{\sqrt{2}},$$

故终态时，$T_A = 2T_f = \sqrt{2}T$；$T_B = T_f = \dfrac{T}{\sqrt{2}}$。

下面求系统所做的最小功 $W_{\min}$，　$W_{\min} + Q_2 = Q_1$，

$$W_{\min} = Q_1 - Q_2 = C(2T_f - T) - C(T - T_f) = CT\left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= CT\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = CT\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right) = 0.12CT$$

三，线性谐振子的能谱为 $\varepsilon_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$，当系统温度足够低时，振子仅占据基态和第一激发态。求振子处于第一激发态与基态的几率之比；并计算振子的平均能量。（玻尔兹曼分布）

解：（1），求振子处于第一激发态与基态的几率之比：

配分函数 $z = \sum_n \omega_n e^{-\beta\varepsilon_n}$，第 n 个能级上的粒子数与粒子总数之比为：

$$P_n = \frac{a_n}{N} = \frac{\omega_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{\omega_1 + \omega_2 e^{-\beta\varepsilon_2} + \cdots} = \frac{\omega_n e^{-\beta\varepsilon_n}}{z},$$

上式中的 ω_n 为线性谐振子的能级简并度，　$\omega_n = 1$

故：$P_n = \dfrac{1}{z}e^{-\beta\varepsilon_n} = \dfrac{1}{z}e^{-\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega}$，

$P_0 = \dfrac{1}{z}e^{-\beta\frac{1}{2}\hbar\omega}$；　　$P_1 = \dfrac{1}{z}e^{-\beta\frac{3}{2}\hbar\omega}$，

$\dfrac{P_1}{P_0} = e^{-\beta\hbar\omega}$。

（2），计算振子的平均能量：

配分函数 $z = \sum_n \omega_n e^{-\beta\varepsilon_n} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} + e^{-\frac{3}{2}\beta\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\left(1 + e^{-\beta\hbar\omega}\right)$，

$$\ln z = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}\right) + \ln\left(1 + e^{-\beta\hbar\omega}\right) = -\frac{1}{2}\beta\hbar\omega + \ln\left(1 + e^{-\beta\hbar\omega}\right),$$

振子的平均能量：　$\bar{\varepsilon} = \dfrac{E}{N} = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\ln z = \dfrac{1}{2}\hbar\omega + \dfrac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}+1}$。

四，处于平衡状态的光子气体，在体积 V 内，温度为 T，导出光子总数和能量密度的表达式，说明它们与温度的依赖关系。（玻色分布）

［提示：光子气体的化学势 $\mu=0$，光子的自旋量子数为1，自旋在动量方向上的投影可取两个可能值 $\pm\hbar$（相当于左右偏振）］

（$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}\cdot dx = 2\times 1.202 = const.$；$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\cdot dx = \frac{\pi^4}{15} = const.$）

解：由于光子气体中的总光子数不守恒，故光子气体的化学势 $\mu=0$，光子的自旋量子数为1，自旋在动量方向上的投影可取两个可能值 $\pm\hbar$（相当于左右偏振），动量在 $p-p+dp$ 范围内的量子态数为：

$$2\times\frac{1}{h^3}\int dxdydzdp_x dp_y dp_z,$$

（坐标变换： $dp_x dp_y dp_z \to p^2\sin\theta\cdot dpd\theta d\varphi$,）

上式积分为：

$$2\times\frac{4\pi V}{h^3}p^2dp,$$

在 $\omega-\omega+d\omega$ 范围内的量子态数为：

$$\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2d\omega,$$

（用 $\varepsilon=cp=\hbar\omega$）

在 $\omega-\omega+d\omega$ 范围内的平均光子数为：

$$\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2d\omega\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1},$$

光子总数为：

$$N=\int_0^\infty\frac{V}{\pi^2c^3}\cdot\frac{\omega^2d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}=\frac{V}{\pi^2c^3}\cdot\int_0^\infty\frac{\omega^2d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}=\frac{V\cdot k^3}{\pi^2c^3\cdot\hbar^3}\cdot T^3\cdot\int_0^\infty\frac{x^2}{e^x-1}\cdot dx。$$

因 $\int_0^\infty\frac{x^2}{e^x-1}\cdot dx=2\times1.202=const.$

所以 $N\propto T^3$

在 $\omega-\omega+d\omega$ 范围内的平均光子能量为：

$$\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2d\omega\cdot\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\cdot\hbar\omega,$$

总能量为：

$$U=\int_0^\infty \frac{V}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}=\frac{V}{\pi^2 c^3}\cdot\int_0^\infty\frac{\hbar\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}=\frac{V\cdot k^4}{\pi^2 c^3\cdot\hbar^3}\cdot T^4\cdot\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}\cdot dx$$

$$\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}\cdot dx=\frac{\pi^4}{15}=const.$$

所以总能量U或能量密度 $\frac{U}{V}$ 正比于 T^4。

五，由N个自由电子组成的二维电子气处在面积S内，求：（1）在能量范围$\varepsilon-\varepsilon+d\varepsilon$内的量子态数；（2）$T$=0$K$时的费米能量$\varepsilon_F$；（3）$T$=0$K$时，每个电子的平均能量$\bar{\varepsilon}$。（费米分布）

解：（1）在能量范围$\varepsilon-\varepsilon+d\varepsilon$内的量子态数：

对二维体系，动量在 $p-p+dp$ 范围内的量子态数为：

$(2s+1)\frac{1}{h^2}\int dxdydp_xdp_y$，（对电子：$s=\frac{1}{2}$）

$(2s+1)\frac{1}{h^2}\int dxdydp_xdp_y=2\times\frac{2\pi S}{h^2}pdp=\frac{4\pi S}{h^2}pdp$，（积分变换到极坐标）

用 $\varepsilon=\frac{p^2}{2m}$代入，得在能量范围$\varepsilon-\varepsilon+d\varepsilon$内的量子态数：

$\Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi mS}{h^2}d\varepsilon$，其中 $\Omega(\varepsilon)$ 为态密度。

（2）T=0K时的费米能量ε_F：

求T=0K时的粒子总数N，得费米能量ε_F，

$$N=\int_0^\infty f(\varepsilon)\Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_F}\Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi mS}{h^2}\varepsilon_F,$$

$$\varepsilon_F=\frac{Nh^2}{4\pi mS}。$$

（3）每个电子的平均能量$\bar{\varepsilon}$：

先求系统的总能量$\bar{E}$，则 $\bar{\varepsilon}=\frac{\bar{E}}{N}$ 。

$$\bar{E}=\int_0^\infty\varepsilon\cdot f(\varepsilon)\Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon\cdot\Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi mS}{h^2}\times\frac{1}{2}\varepsilon_F^2,\ T=0K\text{时},$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\bar{E}}{N}=\frac{1}{2}\varepsilon_F。$$