2006年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

* 说明：全部答题包括填空、选择题必须答在考点下发的答题纸上，否则，一律无效。

试题名称：　量子力学

1，（30分） 一个质量为μ的粒子被限制在一维区域$-a \le x \le a$运动， t=0 时处于基态。 今势阱突然向两边对称地扩展一倍，即可以在$-2a \le x \le 2a$ 范围内运动。问

（a） $t = t_0$（ 〉0） 时粒子处于新系统中基态的几率。

（b） $t=t_0$ 时，粒子能量的平均值。

2，（20分）一维谐振子的哈密顿量为

$$H = \hat{p}^2/2\mu + \mu\omega^2 x^2/2 \quad (x \in (-\infty, \infty))$$

在坐标表象中，它的能量本征态波函数为$\psi_n(x) = N_n H_n(\alpha x) e^{-\alpha^2 x^2/2}$，这里$N_n$是归一化系数，$H_n$为厄米多项式，$\alpha = \sqrt{\mu\omega/\hbar}$。试在动量表象中求出它的能量本征值和相应的波函数。

3，（30分）电子处于自旋$\vec{S}$在方向 $\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ 上的投影$\vec{S} \bullet \vec{n}$ 的本征态，本征值为$\hbar/2$。

（a）求出相应的本征波函数；

（b）若在上面的态中，自旋的 x 分量和 y 分量有相等的均方差，请求出方向角θ, ϕ。

4.（30分）自旋1/2的粒子处于磁场$\vec{B}$中，该粒子绕磁场进动的角频率记为$\vec{\omega} = -\gamma\vec{B}$。设 t=0 时刻粒子处于自旋朝下状态$|\psi(0)\rangle = |-\rangle$，求 t 时刻粒子仍处于该状态的几率。

5.（20分）在谐振子的哈密顿量$H_0 = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{m\omega^2}{2}x^2$上加上$x^3$的微扰项$H_1 = \lambda x^3$，求能量的二级修正。

6.（20分）有一量子力学体系，哈密顿量H的本征值与本征矢分别为E_n 与$|n>$，即$H|n> = E_n|n>$ 。 设 F 为任一算符 $F = F(x,p)$ ，试证

$$\langle k|[F^\dagger,[H,F]]|k\rangle = \sum_n (E_n - E_k)\left(|\langle n|F|k\rangle|^2 + |\langle k|F|n\rangle|^2\right)$$

科目名称：	量子力学 434

1，解

(a)

t=o, 系统处于旧势的基态，归一的波函数和能量本征值为

$\psi(x,0)=\psi_1(x)=\sqrt{1/a}\cos[\pi x/2a], -a\le x\le a$

$E=E_1=\pi^2\hbar^2/8\mu a^2$

t>0 后，势阱扩充，新的定态能量本征态波函数和能量本征值分别为

$\psi'_n(x)=\sqrt{1/2a}\sin[n\pi(x+2a)/4a]$,

$E'_n=n^2\pi^2\hbar^2/32\mu a^2, n=1,2,3,\ldots,-2a\le x\le 2a$

新系统状态的一般波函数为

$\psi'(x,t)=\sum_n c_n\psi'_n(x)e^{-iE'_n t/\hbar}$

由波函数在 t=o 时的连续条件 $\psi'(x,0)=\psi(x,0)$

可得 $c_n=(\psi'_n,\psi_1)=\int_{-a}^{a}dx\,\psi'_1(x)^*\psi_1(x)$

于是知 $t=t_0>0$ 时刻，粒子处于新基态的几率为

$$P=\left|c_1e^{-iE'_1t_0/\hbar}\right|^2=|c_1|^2$$

$$=\left|\int_{-a}^{a}dx\sqrt{1/2a}\cos[\pi x/4a]\sqrt{1/a}\cos[\pi x/2a]\right|^2$$

$$=64/9\pi^2$$

(b) 系统能量平均值则和势阱未扩前一样，为

$\overline{E}=E_1=\pi^2\hbar^2/8\mu a^2$.

2，解

一维无限谐振子的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2\mu}\hat{p}^2+\frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{x}^2$$

在坐标表象中， $\hat{x}=x,\hat{p}^2=-\hbar^2\dfrac{d^2}{dx^2}$

在动量表象中，$\hat{p}=p,\hat{x}^2=-\hbar^2\dfrac{d^2}{dp^2}$

这两个算符在两个表象中的关系是完全对称的，考虑到哈密顿量里两个算符前面的系数，只要作变换

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\to\frac{1}{2\mu}p^2$$

或 $x \to p/\mu\omega$

就可以。于是知在动量表象中的能量本征波函数为

$$\varphi_n(p) = N_n^{'} H_n(\alpha p/\mu\omega) e^{-\alpha^2 p^2/2\mu\omega}$$

$$= N_n^{'} H_n(\beta p) e^{-\beta^2 p^2/2}$$

$$\beta = \alpha/\mu\omega = 1/\sqrt{\mu\hbar\omega}$$

能量本征值与表象无关，仍为

$$E_n = (n+1/2)\hbar\omega, n = 0,1,2,....$$

3，解

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{S} \bullet \vec{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

（a） $\vec{S}.\bullet \vec{n}\psi = \frac{\hbar}{2}\psi$

令 $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，由方程

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

可解得所要求得归一化的波函数

$$\psi_+(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} \end{pmatrix}$$

（b），在上面的态中，

$$\overline{S}_x = \frac{\hbar}{2}\overline{\sigma}_1 = \frac{\hbar}{2}\psi_+^{+}\sigma_1\psi_+ = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\phi$$

$$\overline{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2 = \frac{\hbar}{2}\psi_+^{+}\sigma_2\psi_+ = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin\phi$$

而

$$< S_x^2 > = < S_y^2 > = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$< \Delta S_x^2 > = < S_x^2 > - < S_x >^2, < \Delta S_y^2 > = < S_y^2 > - < S_y >^2$$

故由条件

$<\Delta S_x^2>=<\Delta S_y^2>$

得

$\sin^2\theta\cos^2\phi=\sin^2\theta\sin^2\phi$

由此解得最后结果：

$\theta=0$或π，ϕ任意

或者

$\theta\neq 0$或π，$\phi=\pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4$。

4，解：哈密顿量为$H=\vec{\omega}\cdot\vec{S}=-\gamma\vec{B}\cdot\vec{S}$，这里$\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$是自旋算符， 时间演化算子为

$U=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right)=\exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}\right)$， 在基矢$|+\rangle,|-\rangle$上$U$的矩阵表示为

$$U=\begin{pmatrix}\cos\frac{\omega t}{2}-i\frac{\omega_z}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2} & -\frac{\omega_y-i\omega_x}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\\ \frac{\omega_y-i\omega_x}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2} & \cos\frac{\omega t}{2}+i\frac{\omega_z}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}\end{pmatrix}$$

，这里$\omega=\sqrt{\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2}$。于是在$t$时刻该粒子仍处于$|-\rangle$态的几率是$P_{--}(t)=|\langle -|U|-\rangle|^2=|\cos\frac{\omega t}{2}+i\frac{\omega_z}{\omega}\sin\frac{\omega t}{2}|^2$。

5，解：$H=H_0+H_1$，设$|n\rangle$为H_0的本征值为$E_n^{(0)}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$的本征态，则能量的一、二级修正分别为$E_n^{(1)}=\langle n|H_1|n\rangle$及$E_n^{(2)}=\sum\limits_{m\neq n}\frac{|\langle m|H_1|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}$。

由于$\langle n|x|n+1\rangle=\sqrt{\frac{n+1}{2\alpha}}$，$\langle n|x|n-1\rangle=\sqrt{\frac{n}{2\alpha}}$，（$\alpha=\sqrt{m\omega/\hbar}$），其他矩阵元为零，

所以$\langle n-3|x^3|n\rangle=\langle n|x^3|n-3\rangle=\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{(2\alpha)^{3/2}}$，

$\langle n-1|x^3|n\rangle=\langle n|x^3|n-1\rangle=\frac{3n^{3/2}}{(2\alpha)^{3/2}}$，其他矩阵元为零。

由对称性有$E_n^{(1)}=0$，而

$$E_n^{(2)}=\lambda^2\left(\frac{|\langle n-3|x^3|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_{n-3}^{(0)}}+\frac{|\langle n-1|x^3|n\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_{n-1}^{(0)}}+\frac{|\langle n|x^3|n+1\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_{n+1}^{(0)}}+\frac{|\langle n|x^3|n+3\rangle|^2}{E_n^{(0)}-E_{n+3}^{(0)}}\right)$$

$$=-\frac{15}{4}\frac{\lambda^2\hbar^2}{m^3\omega^4}\left(n^2+n+\frac{11}{30}\right)。$$

6，解：$[F^{+},[H,F]]=F^{+}HF+FHF^{+}-F^{+}FH-HFF^{+}$，而且$\sum_{n}|n\rangle\langle n|=1$，

于是$\langle k|F^{\dagger}HF|k\rangle=\sum_{n}\langle k|F^{\dagger}H|n\rangle\langle n|F|k\rangle=\sum_{n}E_{n}|\langle n|F|k\rangle|^{2}$，

$$\langle k|FHF^{\dagger}|k\rangle=\sum_{n}\langle k|F|n\rangle\langle n|HF^{\dagger}|k\rangle=\sum_{n}E_{n}|\langle k|F|n\rangle|^{2},$$

$$\langle k|HFF^{\dagger}|k\rangle=E_{k}\sum_{n}\langle k|F|n\rangle\langle n|F^{\dagger}|k\rangle=E_{k}\sum_{n}|\langle k|F|n\rangle|^{2},$$

$$\langle k|F^{\dagger}FH|k\rangle=E_{k}\sum_{n}\langle k|F^{\dagger}|n\rangle\langle n|F|k\rangle=E_{k}\sum_{n}|\langle n|F|k\rangle|^{2},$$

所以

$$\langle k|\left[F^{\dagger},[H,F]\right]|k\rangle=\sum_{n}(E_{n}-E_{k})\left(|\langle n|F|k\rangle|^{2}+|\langle k|F|n\rangle|^{2}\right)。$$