

中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。

一、(共 30 分) 质量为 μ 的粒子在一维无限深势阱中运动，势能

$$V = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x < 0 \text{ 或 } x > a \end{cases}$$

- (1) 求粒子的能级和归一化波函数。
- (2) 画出处于第二、第三激发态的粒子的概率密度的示意图。
- (3) 求坐标算符在能量表象下的矩阵元。

二、(共 30 分) 质量为 μ 的一维谐振子，带电 q ，初始 $t = -\infty$ 时处于基态 $|0\rangle$ 。设

加上微扰 $H' = -qEx \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$ ，其中 E 为外电场强度， τ 为参数。求 $t = +\infty$ 时

谐振子仍停留在基态的概率。

三、(共 30 分) 设一转动惯量为 I 、电偶极矩为 D 的转子自由地在 XY 平面内转动，转角为 φ 。

- (1) 试求其能量本征值和本征态。
- (2) 设沿 X 方向加上电场 E ，即微扰哈密顿量为 $H' = -DE \cos \varphi$ ，试用微扰论求其基态能量的一级和二级微扰修正。

四、(共 30 分)

- (1) 写出角动量算符的三个分量 J_x 、 J_y 、 J_z 相互间满足的所有对易关系。
- (2) 试利用这些对易关系，证明矩阵元 $\langle m | J_x | n \rangle$ 仅当 $m = n \pm 1$ 时不为零。其中 $|m\rangle$ 、 $|n\rangle$ 分别为 J_z 的本征值为 $m\hbar$ 、 $n\hbar$ 的本征态。
- (3) 设角动量量子数 $j = 1$ 。已知在 J_z 的某一个本征态 $|m\rangle$ 中， J_x 取值为 0 的概率为 $1/2$ 。求 J_x 取值为 $-\hbar$ 的概率。

五、(共 30 分) 氢原子的哈密顿量为 $H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}$, 基态波函数及基态能量为

$$\psi_0(r) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}, E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}, \text{其中 } a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \text{ 为第一 Bohr 轨道半径。}$$

设体系受到微扰 $H' = e\epsilon z$ 的作用 (沿 z 方向加上均匀电场 ϵ), 哈密顿量变成 $H = H_0 + H'$ 。

(1) 计算对易关系: $[H_0, H']$ 及 $[H', [H_0, H']]$ 。

(2) 计算 ψ_0 下的平均值: $\langle H' \rangle_0$ 及 $\langle H'^2 \rangle_0$ 。

(3) 取基态试探波函数为 $\psi(\lambda) = N(1 + \lambda H')\psi_0$, 其中 N 为归一化常数。试以 λ 为变分参数, 用变分法求 H 的基态能量上限 (准确到 ϵ^2 量级)。