南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 理论力学 812

适 用 专 业: 天体测量与天体力学

注意:

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上,写在试卷和其他纸上无效;

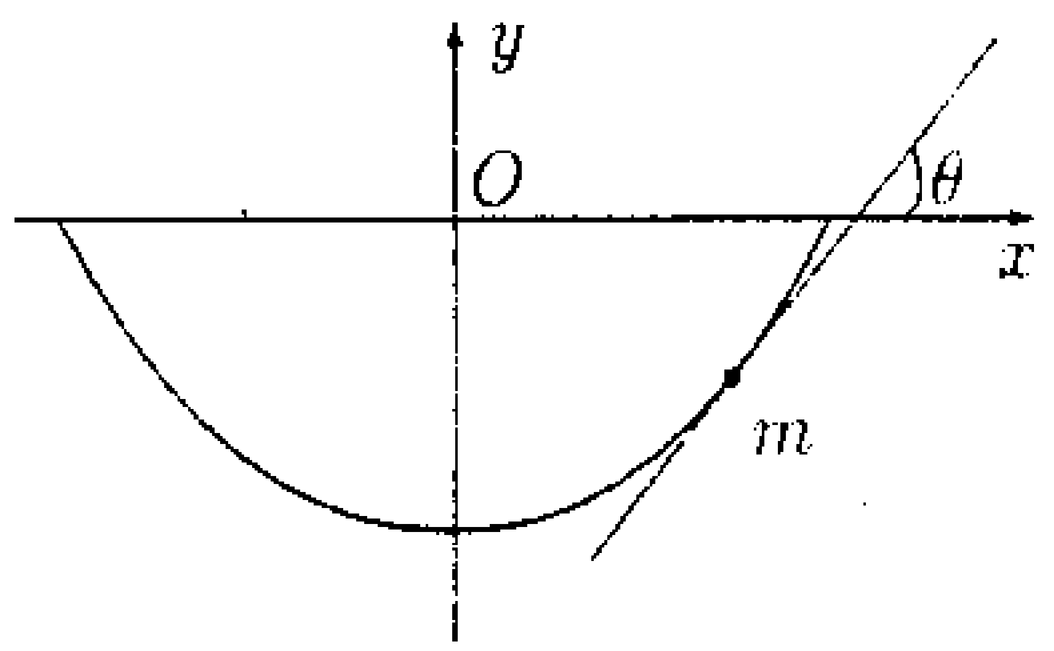
2.本科目允许/不允许使用~~无字典存储和编程功能~~的计算器。

说明:本试卷共 5 题,总分 150 分,各题分数标在题前. 解题时写出必要的步骤.

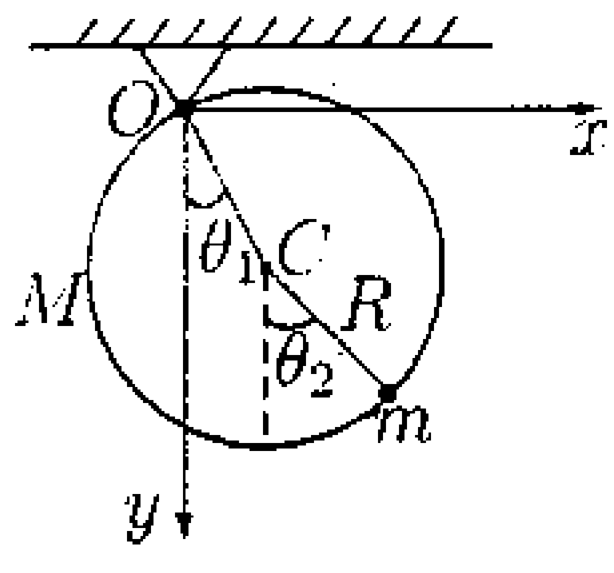
一. (30 分) 一质量为 m 的质点自位于竖直平面内的光滑圆滚线的尖端无初速地下滑 (见题 1 图). 已知圆滚线方程为

$$x = a(2\theta + \sin 2\theta), \quad y = -a(1 + \cos 2\theta).$$

式中 θ 为圆滚线上任一点的切线方向与水平线之间的夹角. (i) 求出质点的运动微分方程; (ii) 求在任一位置质点的速度与 θ 的关系; (iii) 试证在任何一点的压力为 $2mg\cos\theta$.



题 1 图

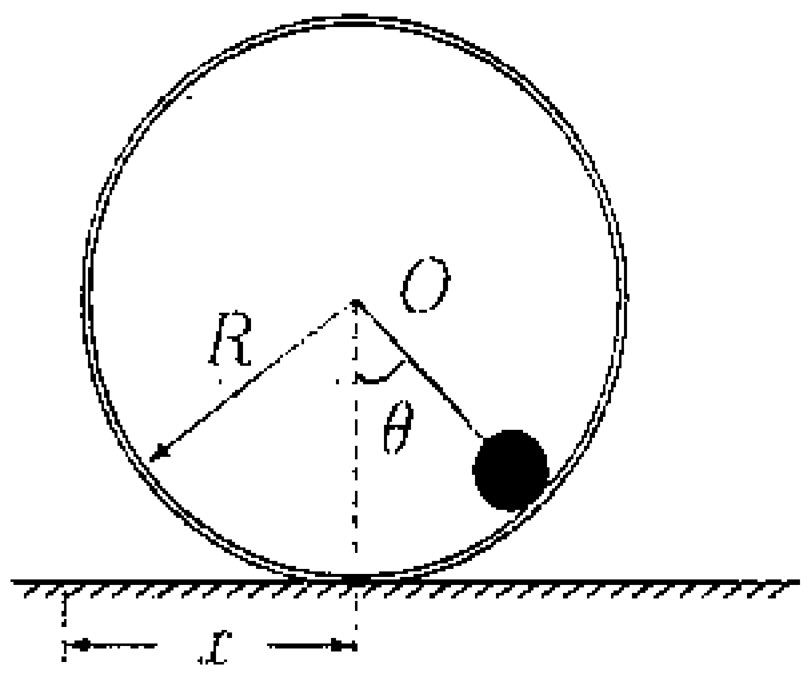


题 2 图

二. (30 分) 匀质环, 质量为 M, 半径为 R, 可绕通过环上一点而垂直于环面的水平轴自由转动. 质量为 m 的质点穿在环上, 可以自由滑动 (见题 2 图). (i) 写出系统的拉格朗日函数并求出相应的运动微分方程; (ii) 求系统小振动的简正频率以及相应的运动方程的解.

三. (30 分) 在万有引力作用下，行星绕太阳沿半长轴为 a, 偏心率为 e 的椭圆轨道运动. 如在远日点行星的速度突然增加 δv(设其为小量). 证明在近日点时行星到太阳的距离增加了 $4\,\delta v\sqrt{\frac{a^3(1-e)}{\lambda(1+e)}}$, 其中 $\lambda = GM$, G 为万有引力常数, M 为太阳的质量.

四. (30 分) 半径为 R. 质量为 m_0 的空心薄壁圆柱在水平面上作无滑滚动，一质量为 m 可以视为质点的小圆球沿光滑的圆柱内壁运动 (如题 4 图所示). (i) 写出系统的拉格朗日函数； (ii) 用拉格朗日方程求出系统的运动微分方程； (iii) 系统是否有运动积分 (第一积分)? 如有，请说明其物理含义并写出相应的表示式； (iv) 求出系统的哈密顿函数.



题 4 图

五. (30 分) 设一系统的哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}(Xq^2 + 2Yqp + Zp^2),$$

其中 q. p 分别为系统的广义坐标和广义动量, $(X.Y.Z)$ 是常参数, 且有 $XZ > Y^2$. (i) 证明系统作简谐振动，振动频率为 $\omega = \sqrt{XZ - Y^2}$; (ii) 求出作用变量 J, 并证明它可以表示为 $J = \frac{2\pi E}{\omega}$. 其中 E 为系统的机械能. (iii) 作变换 $q = \sqrt{Z}Q$, 且变换是正则的，变换后的系统的哈密顿函数为

$$K = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\omega^2 Q^2,$$

求出 P 与 q, p 的关系以及生成函数.

南京大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 高等数学乙 636

适 用 专 业：天体物理、天体测量、天体力学

注意：

1.所有答案必须写在研究生入学考试答题纸上，写在试卷和其他纸上无效；

2.本科目~~允许~~/不允许使用~~无字典存储和编程功能的~~计算器。

一、计算下列各题（每小题6分，共48分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)-2\sin x}{\arctan(2x)-2\arctan x}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan^2 x}$.

3. $y=x\arctan\frac{1}{x}$，求 y'，y''.

4. $f(x)=\dfrac{x}{1+2x}+e^{-x}\sin x+a+bx+cx^2$，$x\to 0$ 时 $f(x)$ 为3阶无穷小量（与 x 比较）. 求 a,b,c，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

5. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{1+n^4}-n^2}{n^p}$ 的敛散性（$p\in R$）.

6. 求 $\int\dfrac{3x+5}{(x^2+2x+1)^2}dx$.

7. 设 f 具有2阶连续偏导数，$z=f(\frac{x}{y},\frac{y}{x})$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

8. 设 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $x^2+y^2\le 2y$ 内的部分，求 $\iint\limits_{\Sigma}z^2dS$.

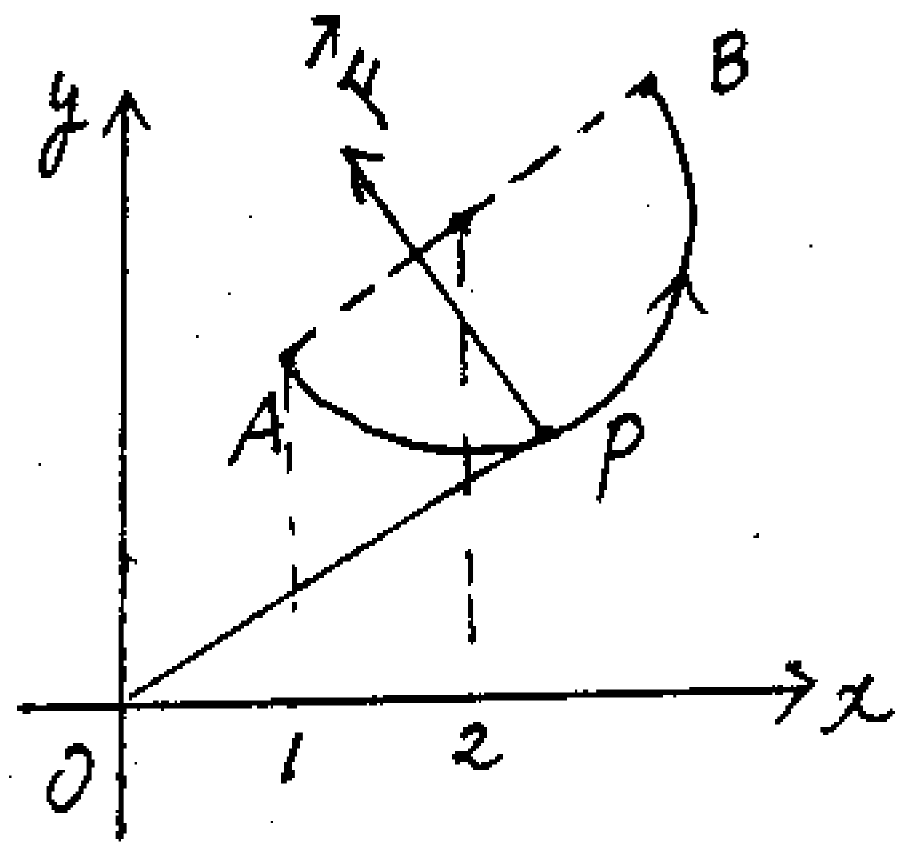
二.（12分）设 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\frac{1}{x}, & x<0,\\ x-\sin x, & x\ge 0,\end{cases}$ 求 $f''(x)$.

三（12分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$a>0$，求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $ab(f(b)-f(a))=\xi^2 f'(\xi)(b-a)$.

五(12分) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ 的收敛域.

六(12分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, $f(0)=0$. $\Omega: x^2+y^2+z^2\leq t^2$, 求 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dV$.

七.(12分) 质点P沿着以AB为直径的半圆周从A(1,2)运动到B(3,4)(如图), 受力 $\vec{F}$ 作用, $\vec{F}$ 的大小等于P与原点O的距离, 其方向垂直于OP, 且与y轴的夹角为锐角, 求力 $\vec{F}$ 对质点P所作的功.



八.(8分) 求方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c\\ a & x & b & c\\ a & b & x & c\\ a & b & c & x\end{vmatrix}=0$ 的根.

九.(10分) 设 $\vec{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$ 是n维列向量 $(i=1,2,\cdots,r, r<n)$, 且 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r$ 线性无关, 已知 $\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$ 的非零解向量, 试判别向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_r,\vec{\beta}$ 的线性相关性.

十.(12分) 已知二次型 $f=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$,

用正交变换把二次型f化为标准形 并写出相应的