

2026 年全国硕士研究生招生考试
(数学二)
(科目代码: 302)

一、选择题:1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $ax^2 + bx + \arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2} - 1$ 是等价无穷小, 则 ()

(A) $a = \frac{1}{3}, b = -1$

(B) $a = \frac{1}{3}, b = 1$

(C) $a = \frac{2}{3}, b = -1$

(D) $a = \frac{2}{3}, b = 1$

2. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是某 2 阶非齐次线性微分方程的两个特解, 若常数 λ, μ 使得 $2\lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ 是该方程的解, $\lambda y_1(x) - 2\mu y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()

(A) $\lambda = \frac{1}{5}, \mu = \frac{2}{5}$

(B) $\lambda = \frac{2}{5}, \mu = \frac{1}{5}$

(C) $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{2}$

(D) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{4}$

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = e^{y+az}$ (a 是非零常数) 确定, 则 ()

(A) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

(B) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{a}$

(C) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

(D) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{a}$

4. 设线密度为 1 的细直棒的两个端点分别位于点 $(-1, 0)$ 和点 $(1, 0)$ 处, 质量为 m 的质点位于点 $(0, 1)$ 处, G 为引力常量, 则该细直棒对该质点的引力大小为 ()

(A) $\int_0^1 \frac{2Gmx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} dx$

(B) $\int_0^1 \frac{2Gm}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} dx$

(C) $\int_0^1 \frac{2Gmx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

(D) $\int_0^1 \frac{2Gm}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx$

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有定义, 则 ()

(A) 当 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 单调递增时, $f(0)$ 是极小值

(B) 当 $f(0)$ 是极小值时, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减时, 在 $(0, 1)$ 单调递增

(C) 当 $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的时, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增

(D) 当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1,1)$ 单调递增时, $f(x)$ 的图形在 $[-1,1]$ 是凹的

6. 已知函数 $f(x) = \int_1^{x^3} \frac{e^t}{1+t^2} dt$, f 的反函数为 g , 则 ()

(A) $g(0) = 1, g'(0) = \frac{3}{2}e$

(B) $g(0) = 1, g'(0) = \frac{2}{3e}$

(C) $g(1) = 0, g'(1) = \frac{3}{2}e$

(D) $g(1) = 0, g'(1) = \frac{2}{3e}$

7. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ 上连续, 且 $f(x, y) = f(y, x)$, 则

$\iint_D f(x, y) dx dy = ()$

(A) $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1-i}^n f(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \frac{1}{n^2}$

(B) $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) \frac{1}{n^2}$

(C) $2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+1-i} f(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}) \frac{1}{n^2}$

(D) $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=1}^i f(\frac{i}{2n}, \frac{j}{2n}) \frac{1}{n^2}$

8. 单位矩阵经若干次互换两行得到的矩阵. 设 A 为 n 阶置换矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 ()

(A) A^* 为置换矩阵

(B) A^{-1} 为置换矩阵

(C) $A^{-1} = A^*$

(D) $A^{-1} = -A^*$

9. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. 若存在矩阵 B 满足 $AB = C$, 则 ()

(A) $a = -1, b = -1$

(B) $a = 2, b = 2$

(C) $a = -1, b = 2$

(D) $a = 2, b = -1$

10. 设 3 阶矩阵 A, B , 满足 $AB + BA = A^2 + B^2$, 则 $A \neq B$. 则下列结论错误的是 ()

(A) $(A - B)^3 = 0$

(B) $A - B$ 只有零特征值

(C) A, B 不能都是对角矩阵

(D) $A - B$ 只有一个线性无关的特征向量

二、填空题:11~16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. 设 p 为常数,若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(x+1)} dx$ 收敛,则 p 的取值范围是_____.

12. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x \sin x} \right) =$ _____.

13. 设曲线 $x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率半径为_____.

14. 已知函数 $f(x,y)$ 可微,且 $df(0,0) = \pi dx + 3dy$,记 $g(x) = f(\ln x, \sin \pi x)$,则 $g'(1) =$ _____.

15. 函数 $f(x) = \ln(2+x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均值为_____.

16. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ a+2 & 3 & -3a \end{pmatrix}$,若二次型 $x^T(AA^T)x$ 的规范形为 y_1^2 ,则 $a+b =$ _____.

三、解答题:17~22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

$$\text{计算 } I = \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} y \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

18. (本题满分 12 分)

已知函数 $g(x)$ 连续, $f(x) = \int_0^{x^2} g(xt) dt$,求 $f'(x)$ 的表达式,并判断 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

19. (本题满分 12 分)

求函数 $f(x,y) = (2x^2 - y^2)e^x$ 的极值.

20. (本题满分 12 分)

已知 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x \geq 0)$ 的拐点, O 为坐标原点,记 D 是第一象限中以曲线 $y = \frac{1}{1+x^2} (x \geq x_0)$, 线段 OM 及 x 正半轴为边界的无界区域,求 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

21. (本题满分 12 分)

求微分方程 $x^2 y'' - 2xy' - (y')^2 = 0 (x > 2)$ 满足条件 $y|_{x=3} = \frac{1}{2}$, $y'|_{x=3} = -9$ 的解.

22. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 记 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$,

$G = (\alpha_1, \alpha_2)$.

(1) 证明: α_1, α_2 是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组;

(2) 求矩阵 H 使得 $A = GH$, 并求 A^{10} .