2026 年全国硕士研究生招生考试
（数学三）
（科目代码：303）

一、选择题:1～10 小题,每小题 5 分,共 50 分,下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选选项前的字母填在答题卡指定位置.

1. 曲线 $y = xe^{\frac{1}{x}}$ (　　)

(A) 无水平渐近线，无铅直渐近线　　(B) 有水平渐近线，有铅直渐近线

(C) 无水平渐近线，有铅直渐近线　　(D) 有水平渐近线，无铅直渐近线

2. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $x - az = e^{y+az}$ (a 是非零常数)确定，则(　　)

(A) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{a}$　　(B) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{a}$

(C) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{a}$　　(D) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1}{a}$

3. 已知函数 $f(x) = \int_1^{x^3} \dfrac{e^t}{1+t^2} dt$, f 的反函数 g，则(　　)

(A) $g(0) = 1, g'(0) = \dfrac{3}{2}e$　　(B) $g(0) = 1, g'(0) = \dfrac{2}{3e}$

(C) $g(1) = 1, g'(1) = \dfrac{3}{2}e$　　(D) $g(1) = 1, g'(1) = \dfrac{2}{3e}$

4. 设 t 时刻某证券的交易单价为 $p(t)$，某机构持有该证券的份额为 $q(t)$，若该机构在 $[0,T]$ 持续购入一定份额该证券，则这些证券的平均购入价格为(　　)

(A) $\dfrac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$　　(B) $\dfrac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)dt$

(C) $\dfrac{1}{T}\int_0^T p(t)q'(t)dt$　　(D) $\dfrac{1}{q(T)-q(0)}\int_0^T p(t)q'(t)dt$

5. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.若存在矩阵 B 满足 $AB = C$，则(　　)

(A) $a = -1$，$b = -1$　　(B) $a = 2$，$b = 2$

(C) $a = -1$，$b = 2$　　(D) $a = 2$，$b = -1$

6. 设 A 为3阶非零矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵。若 $A^* = -2A$，则 $A^2 =$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. 设3阶矩阵 A、B 满足 $AB+BA=A^2+B^2$，且 $A\neq B$，则下列错误的是(　　)

(A) $(A-B)^3=0$　　(B) $A-B$ 只有零特征值

(C) A、B 不能都是对角矩阵　　(D) $A-B$ 只有一个线性无关的特征向量

8. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$，

则 $P\{XY\leq 1\}=$(　　)

(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$

(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{6}$

9. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，随机变量 $Y\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，且 X 与 Y 独立，则 XY 与 $X+Y$ 的相关系数为(　　)

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

10. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{3^k}$（$k=1,2,\dots$），则对于正整数 m，n，有(　　)

(A) $P\{X>m+n \mid X>m\}=P\{X>m\}$

(B) $P\{X>m+n \mid X>m\}=P\{X>n\}$

(C) $P\{X>m+n \mid X>m\}>P\{X>m\}$

(D) $P\{X>m+n \mid X>m\}>P\{X>n\}$

二、填空题:11～16 小题,每小题 5 分,共 30 分.

11. $\int_0^1 x(x-1)(x-\frac{1}{2})dx =$______________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})=$______________.

13. 设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p\left(x+1\right)}dx$ 收敛，则 p 的取值范围是______________.

14. 微分方程 $y''-2y'=e^x$ 满足条件 $y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=1$ 的解为 $y=$______________

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ a+2 & 3 & -3a \end{pmatrix}$，若二次型 $x^T\left(AA^T\right)x$ 的规范型为 ${y_1}^2$，

则 $a+b=$______________.

16. 设随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，随机变量 Y 服从参数为3的泊松分布. X 与 $Y-X$ 相互独立，则 $E(XY)=$______________.

三、解答题:17～22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)=\frac{1}{\left(2-x\right)^2}-\int_0^1 f\left(x\right)dx$，将 $f\left(x\right)$ 展开成 x 的幂级数.

18. (本题满分 12 分)

已知函数 $g\left(x\right)$ 连续，设 $f\left(x\right)=\int_0^{x^2} g\left(xt\right)\mathrm{d}t$，求 $f'\left(x\right)$ 的表达式，并判断 $f'\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

19. (本题满分 12 分)

求 $f(x,y)=(2x^2-y^2)e^x$ 的极值.

20. (本题满分 12 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$.

21. (本题满分 12 分)

已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$, 记 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$,

$G=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$.

(1) 证明: α_1,α_2 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组.

(2) 求矩阵 H 使得 $A=GH$, 并求 A^{10}.

22. (本题满分 12 分)

假设某种元件的寿命服从指数分布，其均值 θ 是未知参数.为估计 θ，取 n 个这种元件同时做寿命试验，试验到出现 k （$1\le k\le n$）个元件失效时停止.

(1) 若 $k=1$，失效元件的寿命记为 T，(i) 求 T 的概率密度；(ii) 记 $\hat{\theta}=aT$，确定 a，使 $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$，并求 $D\left(\hat{\theta}\right)$.

(2) 已知 k 个失效元件的寿命值分别为 $t_1,t_2,\dots,t_k$，且 $t_1\le t_2\le\dots\le t_k$，似然函数为

$L(\theta)=\dfrac{1}{\theta^k}e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum\limits_{i=1}^{k}t_i+(n-k)t_k\right]}$，求 θ 的最大似然估计值.