

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题

(A) 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为 ()

A.0 B.1 C.2 D.3

2. 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解,

$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()

A. $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ B. $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$

C. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ D. $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

3. 曲线 $y = x^2$ 与曲线 $y = a \ln x (a \neq 0)$ 相切, 则 $a =$ ()

A.4e B.3e C.2e D.e

4. 设 m, n 为正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性 ()

A. 仅与 m 取值有关 B. 仅与 n 取值有关
C. 与 m, n 取值都有关 D. 与 m, n 取值都无关

5. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

A.x B.z C.-x D.-z

6. (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$ ()

A $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ B $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$

C $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ D $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$

7. 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 下列命题正确的是: ()

A 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$ B 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$
C 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$ D 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$

8. 设 \mathbf{A} 为 4 阶对称矩阵, 且 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{0}$, 若 \mathbf{A} 的秩为 3, 则 \mathbf{A} 相似于 ()

$$9.A \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad D \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

二、填空题

9. 三阶常系数线性齐次微分方程 $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$ 的通解 $y =$ _____

10. 曲线 $y = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ 的渐近线方程为 _____

11. 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) =$ _____

12. 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为 _____

13. 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3cm/s 的速率增加, 则当 $l = 12\text{cm}$, $w = 5\text{cm}$ 时, 它的对角线增加的速率为 _____

14. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____

三、解答题

15. 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值。

16. (1) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n = 1, 2, \dots)$ 的大小, 说明理由。

(2) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt (n = 1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

17. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \psi(t), \end{cases} (t > -1) \text{ 所确定, 其中 } \psi(t) \text{ 具有 2 阶导数, 且 } \psi(1) = \frac{5}{2},$$

$\psi'(1) = 6$, 已知 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$ 。

18. 一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆。现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时, 计算油的质量。

(长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为 ρ 单位为 kg/m^3 .)

19.

设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$

20. 计算二重积分 $I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos 2\theta} dr d\theta$, 其中 $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

21. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$, 证明: 存在

$\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2$.

22.

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解。

(1) 求 λ, a .

(2) 求方程组 $Ax = b$ 的通解。

23. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求 a, Q .