2012 年数学(三)真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【解】 由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$，得 $y=1$ 为曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的水平渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$，得 $x=1$ 为曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$，得 $x=-1$ 不是曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的铅直渐近线，

且曲线没有斜渐近线，故曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有两条渐近线，应选(C).

方法点评：渐近线是频繁考点，曲线的渐近线共有三种，即水平渐近线、铅直渐近线和斜渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，称 $y=A$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，称 $x=a$ 为曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a(\neq 0,\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，称 $y=ax+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

(2)**【答案】** (A).

【解】 **方法一**

由 $f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+2(e^x-1)e^{2x}(e^{3x}-3)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots+$

$n(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{(n-1)x}-n+1)e^{nx}$，

得 $f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$，应选(A).

方法二 由导数的定义，得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!\ ,$$

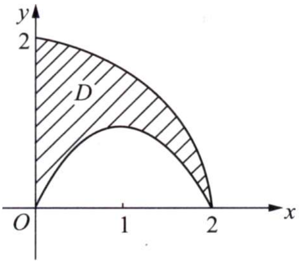
应选(A).

(3)**【答案】** (B).

【解】 如图所示，二重积分的 X 型区域为

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\},$$

则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2} rf(r^2)dr=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)dy$，应选(B).



一(3)题图

(4)**【答案】** (D).

【解】 $\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}\sim\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛，

所以 $\alpha-\dfrac{1}{2}>1$，即 $\alpha>\dfrac{3}{2}$；

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，得 $\alpha<2$，应选(D).

(5)【答案】 (C).

【解】 方法一 $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3+c_4\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 成比例，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，应选(C).

方法二 因为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，应选(C).

(6)【答案】 (B).

【解】 由 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

应选(B).

(7)【答案】 (D).

【解】 令 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，

X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & 其他,\end{cases}$

Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\0, & 其他.\end{cases}$

因为 X,Y 独立，所以 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\0, & 其他,\end{cases}$$

于是 $P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=\dfrac{\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}=\dfrac{\pi}{4}$，应选(D).

(8)【答案】 (B).

【解】 由 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，得 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

由 $X_3+X_4\sim N(2,2\sigma^2)$，得 $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，

于是 $\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$.

由 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}$ 独立,得 $\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1)$,

即 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\sim t(1)$,应选(B).

二、填空题

(9)**【答案】** $e^{-\sqrt{2}}$.

【解】 **方法一** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{\left[1+(\tan x-1)\right]^{\frac{1}{\tan x-1}}\right\}^{\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}.$$

方法二 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}$.

(10)**【答案】** $\dfrac{1}{e}$.

【解】 **方法一** $\dfrac{dy}{dx}=f'[f(x)]\cdot f'(x)$,由 $f(e)=\dfrac{1}{2}$,得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=f'[f(e)]\cdot f'(e)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f'(e),$$

又当 $x<1$ 时, $f'(x)=2$,故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$.

方法二 $y=f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, & f(x)\geqslant 1,\\ 2f(x)-1, & f(x)<1,\end{cases}$

$f(x)\geqslant 1$ 等价于 $\begin{cases}\ln\sqrt{x}\geqslant 1,\\ x\geqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}2x-1\geqslant 1,\\ x<1,\end{cases}$解得 $x\geqslant e^2$;

$f(x)<1$ 等价于 $\begin{cases}\ln\sqrt{x}<1\\ x\geqslant 1\end{cases}$或$\begin{cases}2x-1<1,\\ x<1,\end{cases}$解得 $1\leqslant x<e^2$ 或 $x<1$,

于是 $y=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, & x>e^2,\\ 2\ln\sqrt{x}-1, & 1\leqslant x<e^2,\\ 4x-3, & x<1.\end{cases}$

当 $1<x<e^2$ 时,$f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x}$,故$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$.

(11)【答案】 $2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

【解】 令 $\rho=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$，由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，得

$$f(x,y)-2x+y-2=o(\rho)\text{，或 }f(x,y)-1=2x-(y-1)+o(\rho)\text{，}$$

于是函数 $z=f(x,y)$ 在 $(0,1)$ 处可微，且 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$，

故 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

方法点评：二元函数可偏导、可微、连续可偏导的关系是：

(1)函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可偏导是函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的必要条件，而非充分条件；

(2)函数连续可偏导是函数可微的充分而非必要条件；

(3)当 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可偏导时，$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微的充分必要条件是

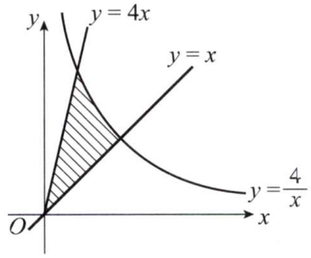
$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-f'_x(x_0,y_0)\Delta x-f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho}=0.$$

(12)【答案】 $4\ln 2$.

【解】 如图所示，三条线所围成的区域的面积为

$$S=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{4}}^{y}\mathrm{d}x+\int_2^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{4}{y}}\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{3}{4}y\,\mathrm{d}y+\int_2^4\left(\frac{4}{y}-\frac{y}{4}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}+4\ln 2-\frac{3}{2}=4\ln 2.$$



二(12)题图

(13)【答案】 -27.

【解】 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|=-3$，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2=9$，

则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}^*|=-27$.

(14)【答案】 $\dfrac{3}{4}$.

【解】 因为 A,C 互不相容，所以

$$P(AB\mid\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题

(15)【解】

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{2-2\cos x}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{12}.$$

(16)【解】

$$\iint_D\mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(1-x^2)\mathrm{e}^x\Big|_0^1+\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+(x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

(17)**【解】** (Ⅰ)由已知条件,得 $\dfrac{\partial C}{\partial x}=\dfrac{x}{2}+20$, $\dfrac{\partial C}{\partial y}=y+6$, 且 $C(0,0)=10\ 000$,

于是 $C(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+20x+\dfrac{y^2}{2}+6y+10\ 000$.

(Ⅱ)由已知条件得 $x+y=50$,成本函数为

$$\begin{aligned}f(x)&=C(x,50-x)\\&=\frac{x^2}{4}+20x+\frac{(50-x)^2}{2}+6(50-x)+10\ 000\ (0\leqslant x\leqslant 50),\end{aligned}$$

由 $f'(x)=\dfrac{3}{2}x-36=0$, 得 $x=24$.

因为 $f''(x)=\dfrac{3}{2}>0$,所以 $x=24$ 是成本函数的最小值点,故当甲产品为 24 件,乙产品为 26 件时,总成本最低,最低成本为 $f(24)=11\ 118$ 万元.

(Ⅲ) $\left.\dfrac{\partial C}{\partial x}\right|_{(24,26)}=32$,

其经济意义为:当生产乙产品 26 件时,生产第 25 件甲产品需要 32 万元.

(18)**【证明】** **方法一** 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1$,

$f'(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$, $f''(x)=\dfrac{4}{(1-x^2)^2}-1-\cos x$.

当 $-1<x<1$ 时,因为 $\dfrac{4}{(1-x^2)^2}\geqslant 4$, $1+\cos x\leqslant 2$,所以 $f''(x)>0$.

又因为 $f'(0)=0$,所以 $\begin{cases}f'(x)<0, & -1<x<0,\\ f'(x)>0, & 0<x<1,\end{cases}$ 于是 $x=0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小点,而 $f(0)=0$,故当 $-1<x<1$ 时, $f(x)\geqslant 0$,即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.

方法二 令 $f(x)=x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1$, $f(0)=0$.

因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,只需要研究 $[0,1)$ 内的情形.

$f'(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{2x}{1-x^2}-\sin x-x=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\sin x-x$, $f'(0)=0$,

$f''(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1$, $f''(0)=2$,

$f'''(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{2}{(1-x)^3}-\dfrac{2}{(1+x)^3}+\sin x>0$,

由 $\begin{cases}f''(0)=2,\\ f'''(x)>0(0<x<1),\end{cases}$ 得 $f''(x)>2>0\ (0<x<1)$;

再由 $\begin{cases}f'(0)=0,\\ f''(x)>0(0<x<1),\end{cases}$ 得 $f'(x)>0\ (0<x<1)$;

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(0<x<1),\end{cases}$ 得 $f(x)>0\ (0<x<1)$,

故当 $-1<x<1$ 时，$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.

方法点评：证明函数不等式是重要考查点，一般采用单调性进行证明，根据导数或高阶导数符号最终确定函数的单调性，根据函数在某一点的符号情况得到所证的不等式.

(19)【解】（Ⅰ）由 $\begin{cases} f''(x)+f'(x)-2f(x)=0, \\ f''(x)+f(x)=2e^x, \end{cases}$ 得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$ ，于是

$$f(x)=\left[\int(-2e^x)e^{\int-3dx}dx+C\right]e^{-\int-3dx}=Ce^{3x}+e^x ,$$

代入 $f''(x)+f(x)=2e^x$，得 $C=0$，故 $f(x)=e^x$.

（Ⅱ）$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ ，

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1 , \quad y''=2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x ,$$

当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$，因为 $y(0)=0$，所以 $(0,0)$ 为曲线的拐点.

(20)【解】（Ⅰ）由行列式按行（或列）展开的性质得

$$|\boldsymbol{A}|=1\times A_{11}+a\cdot A_{41}=M_{11}-aM_{41}=1-a^4 .$$

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无数个解，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，即 $a=-1$ 或 $a=1$.

当 $a=-1$ 时，$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3<4$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有无数个解，通解为

$$\boldsymbol{X}=C\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\ (C\text{ 为任意常数})；$$

当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$,

因为 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

方法点评：行列式虽然不是考查的重点内容，但有几种特殊行列式需要熟练掌握其计算方法：

(1)三对角行列式，如本题矩阵对应的行列式，这种行列式的计算一般采用行列式按行或列的方法展开计算或找递推关系；

(2)对称矩阵对应的行列式，一般采用所有行加到第一行，提取公因子，再将行列式上(下)三角化计算.

非齐次线性方程组解的讨论，首先运用方程组解的理论确定解的存在性，然后利用初等行变换求方程组通解，这个方法一定要反复练习，熟能生巧.

(21)【解】（Ⅰ） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&-a-1\end{pmatrix}$，

由 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$ 及 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ 得 $a=-1$.

（Ⅱ）当 $a=-1$ 时，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$，

得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\lambda_3=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\-\dfrac{1}{\sqrt{3}}&-\dfrac{1}{\sqrt{2}}&\dfrac{1}{\sqrt{6}}\\\dfrac{1}{\sqrt{3}}&0&\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 下，二次型 f 的标准形为

$$f=2y_2^2+6y_3^2.$$

方法点评：本题综合考查了矩阵的性质、特征值与特征向量理论、正交变换法化二次型为标准形等重要知识点，综合性高、覆盖面广，且涉及的都是线性代数的重点内容，需要熟练掌握所涉及知识的理论体系和方法体系.

在解读条件 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=2$ 时，一般做法是，先进行矩阵的乘法，再阶梯化，根据矩阵的秩求出 a，但这样做比较费时，如果想到性质 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$，则本题运算量会大幅下降，所以熟练掌握线性代数有关方法对解题非常重要.

(22)**【解】** (Ⅰ) $P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{1}{4}$.

(Ⅱ)由 (X,Y) 的联合分布律得 X,Y,XY 的分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{6}\end{pmatrix},\ Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix},\ XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \dfrac{7}{12} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{12}\end{pmatrix},$$

于是$E(X)=\dfrac{2}{3}$，$E(Y)=1$，$E(Y^2)=\dfrac{5}{3}$，

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{2}{3},\ E(XY)=\frac{2}{3},$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,$$

故 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-D(Y)=-\dfrac{2}{3}$.

(23)**【解】** (Ⅰ)因为 X 与 Y 独立同分布于参数为 1 的指数分布,故 X 与 Y 的分布函数都为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

$V=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_V(v)&=P\{\min(X,Y)\leqslant v\}=1-P\{\min(X,Y)>v\}=1-P\{X>v,Y>v\}\\&=1-P\{X>v\}P\{Y>v\}=1-[1-P\{X\leqslant v\}]\cdot[1-P\{Y\leqslant v\}]\\&=1-[1-F(v)]^2=\begin{cases}0, & v<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-2v}, & v\geqslant 0,\end{cases}\end{aligned}$$

V 的密度函数为 $f_V(v)=\begin{cases}0, & v\leqslant 0,\\ 2\mathrm{e}^{-2v}, & v>0,\end{cases}$ 即 $V\sim E(2)$.

(Ⅱ)**方法一** $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_U(u)&=P\{U\leqslant u\}=P\{\max(X,Y)\leqslant u\}=P\{X\leqslant u,Y\leqslant u\}\\&=P\{X\leqslant u\}P\{Y\leqslant u\}=F^2(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ (1-\mathrm{e}^{-u})^2, & u\geqslant 0,\end{cases}\end{aligned}$$

U 的密度函数为 $f_U(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ 2\mathrm{e}^{-u}(1-\mathrm{e}^{-u}), & u>0,\end{cases}$

于是 $E(U+V)=E(U)+E(V)=\displaystyle\int_0^{+\infty}u\cdot 2\mathrm{e}^{-u}(1-\mathrm{e}^{-u})\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}u\cdot 2\mathrm{e}^{-2u}\mathrm{d}u$

$$=2\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=2\Gamma(2)=2.$$

方法二 因为 $U+V=\max\{X,Y\}+\min\{X,Y\}=X+Y$，
所以 $E(U+V)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2$.