

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学 (三) 试题

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分, 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求。

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则: ()

- (A) $k=1, c=4$. (B) $k=1, c=-4$. (C) $k=3, c=4$. (D) $k=3, c=-4$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()

- (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0 .

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是: ()

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛. (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

- (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛. (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是: ()

- (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$. (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则 } A = ()$$

- (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.

(6) 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$

的通解为: ()

- (A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$. (B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$.

- (C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$. (D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1) + k_2(\eta_3 - \eta_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是: ()

- (A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$. (C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则对应

的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 和 $T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有: ()

- (A) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$. (B) $E(T_1) > E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$.
 (C) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) > D(T_2)$. (D) $E(T_1) < E(T_2)$, $D(T_1) < D(T_2)$.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

(10) 设函数 $z = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____.

(12) 曲线 $y = \sqrt{x^2-1}$, 直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 _____.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 的秩为 1, A 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu, \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, $f(1,1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值, $z = f[x+y, f(x, y)]$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$.

(17) (本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$.

(18) (本题满分 10 分)

证明方程 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有两个实根.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, $f(0) = 1$, 且满足

$\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(t) dx dy$, $D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t-x, 0 \leq x \leq t\}$ ($0 < t \leq 1$), 求 $f(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$,

$\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21) (本题满分 11 分)

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量; (II) 求矩阵 A .

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0$, $x + y = 2$ 与 $y = 0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求边缘概率密度 $f_X(x)$;

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.