2010 年数学(一) 真题解析

一、选择题

(1)**【答案】** (C).

【解】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+\dfrac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}}\right\}^{\frac{x[(a-b)x+ab]}{(x-a)(x+b)}}=e^{a-b}$,

应选(C).

(2)**【答案】** (B).

【解】 **方法一　复合函数求导法则**

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x 求偏导,得 $-\dfrac{y}{x^2}F_1'+\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F_2'=0$,解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{xF_2'}(yF_1'+zF_2')$;

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边对 y 求偏导,得 $\dfrac{1}{x}F_1'+\dfrac{1}{x}F_2'\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}$.

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{F_2'}(yF_1'+zF_2')-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=z$,应选(B).

方法二　公式法

令 $G(x,y,z)=F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$,

由 $G_x'=-\dfrac{y}{x^2}F_1'-\dfrac{z}{x^2}F_2'$, $G_y'=\dfrac{1}{x}F_1'$, $G_z'=\dfrac{1}{x}F_2'$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=\frac{\dfrac{y}{x^2}F_1'+\dfrac{z}{x^2}F_2'}{\dfrac{1}{x}F_2'}=\frac{1}{xF_2'}(yF_1'+zF_2'),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y'}{G_z'}=-\frac{\dfrac{1}{x}F_1'}{\dfrac{1}{x}F_2'}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{F_2'}(yF_1'+zF_2')-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=z$,应选(B).

方法三　全微分法

$F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 两边求全微分,得 $F_1'\mathrm{d}\left(\dfrac{y}{x}\right)+F_2'\mathrm{d}\left(\dfrac{z}{x}\right)=0$,整理得

$$F_1'\cdot\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}+F_2'\cdot\frac{x\,\mathrm{d}z-z\,\mathrm{d}x}{x^2}=0,$$

从而有 $\mathrm{d}z=\dfrac{1}{xF_2'}(yF_1'+zF_2')\mathrm{d}x-\dfrac{F_1'}{F_2'}\mathrm{d}y$,

于是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{xF_2'}(yF_1'+zF_2')$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}$,

故 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{F_2'}(yF_1'+zF_2')-\dfrac{yF_1'}{F_2'}=z$,应选(B).

(3)【答案】 (D).

【解】 $x=0$ 及 $x=1$ 为反常积分$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的瑕点,

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x,$$

因为$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}\cdot \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$,所以$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛;

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\cdot \ln^{\frac{2}{m}}(1-x)$

$$\xlongequal{1-x=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln^{\frac{2}{m}}t}{t^{-\frac{1}{2}}}=\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-\frac{m}{4}}}\right)^{\frac{2}{m}}=\left(-\frac{4}{m}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{t^{-\frac{m}{4}-1}}\right)^{\frac{2}{m}}=0$$

且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$,所以$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛,故$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛,应选(D).

方法点评:对积分区间有限但函数有无穷间断点的反常积分的敛散性判断通常有定义法和判别法.

(1) 设 $f(x)\in C(a,b]$,且 $f(x)$ 在 $x=a$ 的右邻域内无界.

定义法:对任意的 $\varepsilon>0$,若$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

判别法:设$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^k f(x)=A(\neq\infty)$,则当 $0<k<1, 0\leqslant A<+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;当 $k\geqslant 1, 0<A\leqslant+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 设 $f(x)\in C[a,b)$,且 $f(x)$ 在 $x=b$ 的左邻域内无界.

定义法:对任意的 $\varepsilon>0$,若$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,否则称为发散.

判别法:设$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^k f(x)=A(\neq\infty)$,则当 $0<k<1, 0\leqslant A<+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;当 $k\geqslant 1, 0<A\leqslant+\infty$ 时,反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(4)【答案】 (D).

【解】 取 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, $f(x,y)=\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$,

由$\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}$,根据二重积分的定义,得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y,$$

应选(D).

方法点评:用定积分、重积分等的定义求极限是极限计算的一种重要类型,重点考查定积分定义求极限.

(1) 定积分的定义求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【例】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-n^2}}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\frac{2}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{n}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,$$

于是原式$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{4}$.

(2) 二重积分的定义求极限:$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(5)【答案】 (A).

【解】 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{E})=m$.

因为$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$且$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$,所以$r(\boldsymbol{A})\geqslant m$,$r(\boldsymbol{B})\geqslant m$.

又显然$r(\boldsymbol{A})\leqslant m$,$r(\boldsymbol{B})\leqslant m$,故$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=m$,应选(A).

方法点评:本题使用矩阵秩的两个性质:

(1)$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$,研究矩阵秩的时候,如果出现矩阵的积,使用此性质;

(2) 设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵,则$r(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m,n\}$.

(6)【答案】 (D).

【解】 令$\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0})$,由$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\lambda^2+\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$且$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$得$\lambda^2+\lambda=0$,于是$\lambda=0$或$\lambda=-1$.因为$\boldsymbol{A}$可对角化且$r(\boldsymbol{A})=3$,所以$\lambda=-1$为三重特征值,

故$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$,应选(D).

(7)【答案】 (C).

【解】 $P\{X=1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$,

应选(C).

方法点评：本题需要熟练掌握随机变量分布函数的性质.

设 X 为随机变量，$F(x)$ 具有如下四个特征：

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$；

(2) $F(x)$ 单调不减；

(3) $F(x)$ 右连续；

(4) $F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=1$.

反之，若 $F(x)$ 具有(1) ~ (4) 的特征，则 $F(x)$ 为分布函数.

另外，若 $F(x)$ 为分布函数，则

(1) $P\{X<a\}=F(a-0)$；

(2) $P\{X=a\}=P\{X \leqslant a\}-\{X<a\}=F(a)-F(a-0)$；

(3) $P\{a<X \leqslant b\}=P\{X \leqslant b\}-P\{X \leqslant a\}=F(b)-F(a)$；

(4) $P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X \leqslant a\}=F(b-0)-F(a)$.

(8)**【答案】** (A).

【解】 $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty), \quad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因为 $f(x)$ 为概率密度函数，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\mathrm{d}x+b\int_{0}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+b\int_{0}^{3}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{4}b$，

所以 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{3}{4}b=1$，即 $2a+3b=4$，应选(A).

二、填空题

(9)**【答案】** 0.

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-e^t\ln(1+t^2)$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=-\left[e^t\ln(1+t^2)+e^t\,\frac{2t}{1+t^2}\right]\cdot(-e^t)$$

$$=e^{2t}\left[\ln(1+t^2)+\frac{2t}{1+t^2}\right],$$

于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$.

(10)**【答案】** -4π.

【解】 $$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=t^2} 2\int_0^{\pi}t^2\cos t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}t^2\,\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=2t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\sin t\,\mathrm{d}t=-4\int_0^{\pi}t\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\pi\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=-4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=-4\pi.$$

方法点评：本题考查定积分计算的方法和性质.

定积分计算主要使用两大工具，即定积分的性质及积分法. 本题使用三角函数定积分性质，三角函数定积分的性质总结如下：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，特别地，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x\text{，且 } I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2},I_0=\frac{\pi}{2},I_1=1.$$

(2) $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(11)**【答案】** 0.

【解】 **方法一** 补充 $L_1: y=0$（起点 $(1,0)$，终点 $(-1,0)$），由格林公式

$$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\oint_{L+L_1} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y-\int_{L_1} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y,$$

而 $\oint_{L+L_1} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y}x\,\mathrm{d}x=0$，

$\int_{L_1} xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{L_1} xy\mathrm{d}x=0$，

所以原式 $=0$.

方法二 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{-1}^0[x(1+x)+x^2]\mathrm{d}x+\int_0^1[x(1-x)-x^2]\mathrm{d}x=0.$

(12)**【答案】** $\frac{2}{3}$.

【解】 **方法一** $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，而 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}$，

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\text{，所以 }\bar{z}=\frac{2}{3}.$$

方法二 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，

由 $\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_{xy},x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 得

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^1\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2};$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^4)\mathrm{d}r=\pi\int_0^1(r-r^5)\mathrm{d}r=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{3},$$

故 $\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

方法点评:形心的计算是重积分及线和面积分的物理应用之一.

(1) 设 D 为平面有限区域,其面密度为 $\rho(x,y)$,则

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{D} x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{D} y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_{D}\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

(2) 设 Ω 为空间有限区域,其体密度为 $\rho(x,y,z)$,则

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\quad \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

(3) 设 L 为平面有限曲线段,其线密度为 $\rho(x,y)$,则

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s},\quad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y)\mathrm{d}s}.$$

(4) 设 Σ 为空间有限曲面,其面密度为 $\rho(x,y,z)$,则

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S},\quad \bar{z}=\frac{\iint\limits_{\Sigma} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S}.$$

(13)**【答案】** 6.

【解】 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}$,

因为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 组成的向量组的秩为 2,所以 $a=6$.

方法点评:向量组的秩与向量组所构成的矩阵的秩相等,因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2,所以其构成的矩阵的秩为 2,经过初等行变换阶梯化后应为 2 个非零行,故可求出 a.

(14)**【答案】** 2.

【解】 **方法一** 由概率的归一性得 $1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{C}{k!}=C\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}=C\mathrm{e}$,则 $C=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,

由 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}(k=0,1,2,\cdots)$ 得 $X\sim P(1)$,

于是 $E(X)=D(X)=1$，故 $E(X^2)=D(X)+(EX)^2=2$.

方法二 由 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=C\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=C\mathrm{e}=1$ 得 $C=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

则 $E(X^2)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k-1)!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)+1}{(k-1)!}$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{(k-1)!}+\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}$$

$=2$.

方法点评：随机变量的分布中若含有待定参数，则可以利用概率的归一性求出参数值.

三、解答题

(15)【**解**】 微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，

特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，则方程 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$；

令原方程的特解为 $y_0(x)=x(ax+b)\mathrm{e}^x=(ax^2+bx)\mathrm{e}^x$，代入原方程得 $a=-1,b=-2$，

于是原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}-(x^2+2x)\mathrm{e}^x$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

方法点评：求解二阶非齐次线性微分方程是常考的考点. 求解过程分两步：

第一步，求齐次线性微分方程的特征值，并求出齐次线性微分方程的通解；

第二步，按 $f(x)$ 的具体形式假设特解，代入原方程求出原方程的特解，齐次线性微分方程的通解与非齐次线性微分方程的特解之和即非齐次线性微分方程的通解.

(16)【**解**】 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，

令 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，得 $x=-1,x=0,x=1$.

$f''(x)=2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+4x^2\mathrm{e}^{-x^4}$，因为 $f''(\pm1)=\frac{4}{\mathrm{e}}>0,f''(0)=-2\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0$，所以 $x=-1,x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(\pm1)=0$，$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为 $f(0)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 及 $[0,1]$ 上单调减少，$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 及 $[1,+\infty)$ 上单调增加.

方法点评：一元函数的单调性与极值是同一个问题的两个方面.

求一元函数的极值步骤为：

(1) 求函数的定义域；

(2) 求函数的驻点及不可导点；

(3) 运用第一充分条件或第二充分条件判断所找到的点是否为极值点.

(17)【**解**】 (Ⅰ) 因为当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$\ln(1+t)\leqslant t$，

所以 $|\ln t|[\ln(1+t)]^n\leqslant t^n|\ln t|$，于是 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$.

(Ⅱ) 因为 $0\leqslant\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t$，

而 $\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}(t^{n+1})=-\frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\ln t\Big|_0^1-\int_0^1 t^n\mathrm{d}t\right]$

$$=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\,\Big|_0^1+\frac{1}{(n+1)^2},$$

因为$\lim\limits_{t\to0^+}t^{n+1}\ln t=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln t}{\dfrac{1}{t^{n+1}}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{n+1}{t^{n+2}}}=-\dfrac{1}{n+1}\lim\limits_{t\to0^+}t^{n+1}=0$,

所以$\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{(n+1)^2}$,从而$0\leqslant\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}$,

由迫敛定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\,\mathrm{d}t=0$.

(18)**【解】** 由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$,得幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛半径为$R=1$.

当$x=\pm1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$,由交错级数审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$收敛,故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$的收敛域为$[-1,1]$.

令$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=S(x)$,

则$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=xS_1(x)$,

其中$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$.

而$S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1+x^2}$, $S_1(0)=0$,

所以$S_1(x)=\int_0^x S_1'(x)\mathrm{d}x=\arctan x$,故$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS_1(x)=x\arctan x$.

(19)**【解】** 令P的坐标为(x,y,z),由$S:x^2+y^2+z^2-yz-1=0$,得S在点P处切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{2x,2y-z,2z-y\}$.

因为S在点P处的切平面与xOy平面垂直,所以有$y=2z$,注意到$P\in S$,

所以P点的轨迹方程为$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ y=2z.\end{cases}$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\,|\,y-2z\,|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S,$$

将S向xOy平面投影,得投影区域为D_{xy}: $x^2+\dfrac{y^2}{\dfrac{4}{3}}\leqslant1$,

$x^2+y^2+z^2-yz-1=0$两边对x求导,得$2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y-2z}$,

$x^2+y^2+z^2-yz-1=0$两边对y求导,得$2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-z-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z-2y}{2z-y}$,

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2z-y}\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2z-y}\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}\,dx\,dy,$$

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\mid y-2z\mid}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})dx\,dy$

$$=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy=\sqrt{3}\times\pi\times 1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

(20)【解】 (Ⅰ)因为线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同解,所以 $r(\boldsymbol{A})<3$,即 $|\boldsymbol{A}|=0$,解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=1$.

当 $\lambda=-1$ 时,$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1&1&1&a\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&2&0&a+1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$,

因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$,所以 $a=-2$;

当 $\lambda=1$ 时,$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&a\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$,

显然 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$,所以 $\lambda\neq 1$,故 $\lambda=-1,a=-2$.

(Ⅱ)由 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)$,得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{X}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

(21)【解】 (Ⅰ)因为二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 在正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$,$\boldsymbol{Q}$ 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$,所以 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量正交,令 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,

由 $x_1+x_3=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)$，

由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}&0&-\dfrac{1}{2}\\0&1&0\\-\dfrac{1}{2}&0&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}&0&-\dfrac{1}{2}\\0&2&0\\-\dfrac{1}{2}&0&\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$，

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，因为其特征值都大于零，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

方法点评：本题需要掌握如下几个结论：

(1) 二次型经过正交变换化为标准形时，其标准形的系数即特征值；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{Q}$ 的列为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(3) 实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交；

(4) 由矩阵的特征值与特征向量可反推得矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(5) 判断实对称矩阵为正定矩阵可以通过定义法、特征值法、顺序主子式法等方法，本题通过特征值法证明矩阵正定.

(22)**【解】** **方法一** 由归一性，得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$，

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}(y-x)$，

又 $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}(y-x)=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x^2=t}\int_{0}^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=A\pi$，于是 $A=\dfrac{1}{\pi}$.

方法二
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}(y-x)$$
$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=A\iint_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 xOy 平面，

而 $A\iint_D\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=A\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r=\pi A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}(r^2)=\pi A\Gamma(1)=\pi A$，

由归一性得 $A=\dfrac{1}{\pi}$.

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},$$

而 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$，

所以 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}$，$-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$.

方法点评：二维连续型随机变量的联合密度、边缘密度及条件密度关系如下：

设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)$，则

(1) 边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

若 X,Y 独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

(2) 条件密度

在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件密度为 $f_{Y|X}(y|x)$，且 $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$；

在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件密度为 $f_{X|Y}(x|y)$，且 $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

(23)**【解】** 显然 $N_1\sim B(n,1-\theta)$，$N_2\sim B(n,\theta-\theta^2)$，$N_3\sim B(n,\theta^2)$，

$$E(N_1)=n(1-\theta),\quad E(N_2)=n(\theta-\theta^2),\quad E(N_3)=n\theta^2,$$

由 $E(T)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)$

$=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2=\theta$，得

$$a_1=0,\quad a_2=\frac{1}{n},\quad a_3=\frac{1}{n}.$$

因为 $N_1+N_2+N_3=n$，所以 $T=\frac{1}{n}(N_2+N_3)=1-\frac{1}{n}N_1$，

故 $D(T)=\frac{1}{n^2}D(N_1)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}$.