Table of Contents

2010年浙江工业大学607量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题（10 分）

写出量子力学中的基本对易关系（即坐标算符 x,y,z 与动量算符 p_x,p_y,p_z 之间的对易关系）；写出轨道角动量算符 L_x,L_y,L_z 之间的对易关系。

第二题（10 分）

简述量子力学的基本原理之一“统计诠释”（以对处于 ψ 态的粒子测量力学量 A 为例，重点说明量子力学如何确定可能的测量值及其出现的几率）。

第三题（10 分）

请列举 3 个没有经典物理对应的纯粹量子力学效应。

第四题（10 分）

对质量为 m，固有角频率为 ω 的一维简谐振子，利用不确定性关系估算基态能量。

第五题（10 分）

氢原子的基态能量是 -13.6 电子伏特；基态波函数是 $\psi_{100}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\exp(-r/a)}{\sqrt{\pi a^3}}$，这里 a 是玻尔半径。求氦离子的基态能量，写出它的基态波函数。

第六题（20 分）

已知 $t=0$ 时，简谐振子的初始波函数为 $\Psi(x,0)=A[3\psi_0(x)+4\psi_2(x)]$，这里 $\psi_0(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 是一维简谐振子 $H=\dfrac{p^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ 基态和第二激发态的归一化波函数。

（1）求归一化常数 A，以及 t 时刻的波函数 $\Psi(x,t)$。

（2）求 t 时刻粒子能量的平均值及其涨落（即 $<H>$ 和 σ_H）。

（3）求 t 时刻粒子位置和动量的平均值（即 $<x>$ 和 $<p>$）。

第七题（20 分）

已知一维体系的哈密顿量为 $H = T + V = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$

（1）利用力学量平均值随时间演化的公式，证明 $\dfrac{d}{dt} < xp >= 2 < T > - < x\dfrac{dV}{dx} >$。

（2）如果 $V(x) = \lambda x^4$（这里 λ 为正的常量），则定态下 $< T >$ 与 $< V >$ 有何关系？

第八题（20 分）

利用变分法求一维 δ 势阱中粒子基态的能量（$H = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x)$，这里 α 为正的常量）。取试探波函数为 $\psi(x) = A\exp(-bx^2)$。

[可能用到的积分公式：$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\exp(-x^2)dx = \dfrac{\pi^{1/2}}{2^n}(2n-1)!!$]

第九题（20 分）

记自旋 1/2 粒子 s_Z 的本征态为 $\uparrow$ 和 $\downarrow$（本征值分别为 $+\hbar/2, -\hbar/2$）。

（1）已知一自旋 1/2 粒子的自旋态为 $\dfrac{3}{5}\uparrow + \dfrac{4}{5}\downarrow$。如果测量 s_X，求测量值及其几率。

（2）已知两自旋 1/2 粒子的自旋态为 $\dfrac{4}{5}\uparrow\downarrow + \dfrac{3}{5}\downarrow\uparrow$。如果测量 $\vec{S}^2$，求测量值及其几率（这里 $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$，是总自旋角动量算符）。

第十题（20 分）

质量为 m 的粒子处于二维无限深方势阱之中，$V(x,y) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a,\ 0 < y < a \\ +\infty & 其他 \end{cases}$

（1）写出基态和第一激发态的能量以及相应的归一化波函数，并指明简并度。

（2）如果体系受到如下微扰 $H' = \begin{cases} V_0, & 0 < x < a/2,\ 0 < y < a/2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，用微扰论求基态和第一激发态的能量一级修正。

2011年浙江工业大学667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题（50分）

（1）什么是定态？定态的叠加态还是定态吗？为什么？

（2）量子力学中的力学量用什么算符表示？力学量算符在自身表象中的矩阵有何特点？

（3）现有三种能级与其量子数n的关系分别是正比于n^{-2}，正比于n^2，以及正比于n。请指出它们对应的分别可能是什么系统。

（4）一个电子在均匀恒定外电场$\vec{E}=(\varepsilon,0,0)$中运动，哈密顿量为$H=\dfrac{\vec{p}^2}{2m}-(e\varepsilon)x$。试判断在$H$，$p_x$，$p_y$，$p_z$和$\vec{p}^2$中，哪些是守恒量？为什么？

（5）简述泡利不相容原理，并说明它与全同性原理之间的关系。

第二题（20分）

在一维无限深方势阱$V(x)=\begin{cases}0,(0<x<a)\\ \infty,(x<0,x>a)\end{cases}$中，一质量为$m$的粒子初始波函数为

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}},(0<x<a/2)\\ 0,(x<0,x>a/2)\end{cases}$$

。如果测量粒子能量，求测量值为E_2(第一激发态能量)的几率。

第三题（20分）

900个电子经过1000伏特电势差加速后，从$x=-\infty$射向阶跃势$V(x)=\begin{cases}0,(x<0)\\ V_0,(x>0)\end{cases}$。这里$V_0=750\text{ eV}$。试问在$x=+\infty$处能观察到多少个电子？

第四题（20 分）

氢原子基态波函数为$\psi_{100}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{\exp(-r/a)}{\sqrt{\pi a^3}}$，这里$a$是玻尔半径。求电子处于经典禁区（$r>2a$）的几率。

第五题（20 分）

已知在σ_Z表象下，$\vec{\sigma}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$

这里$\vec{\sigma}$是泡利矩阵，$\vec{n}=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$是$(\theta,\varphi)$方向的单位矢量。

（1）求$\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$的本征值和本征矢。

（2）求在S_Z的本征态$\chi_{1/2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$下，$\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$的测量值及其几率。

第六题（20 分）

考虑一个二维谐振子，其哈密顿量为$H=\dfrac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，这里我们已取自然单位$\hbar=m=1$。已知基态波函数为：$\psi_{00}=\dfrac{\exp[-(x^2+y^2)/2]}{\sqrt{\pi}}$；第一激发态二重简并，波函数分别为：

$\psi_{10}=\dfrac{x\exp[-(x^2+y^2)/2]}{\sqrt{\pi}}$，$\psi_{01}=\dfrac{y\exp[-(x^2+y^2)/2]}{\sqrt{\pi}}$

（1）写出基态和第一激发态的能量值；

（2）如系统受到微扰$V(x,y)=\dfrac{1}{2}\varepsilon xy(x^2+y^2)$的作用（这里$\varepsilon$为小量），求上述能级的能量一级修正。

【可能用到的积分公式：$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx=\sqrt{\pi}$】

2012年浙江工业大学667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。 ★★★★

第一题(50 分)

（1）简述量子力学的基本假设。

（2）在自然边界条件下（即波函数在 $x=\pm\infty$ 处为零），证明 $p_x \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ 是厄米算符。

（3）设一维量子系统的哈密顿算符为 $H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$，计算对易子 $[x,H]$ 和 $[p,H]$。

（4）一维谐振子的哈密顿量为 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$。试用不确定关系估算基态能量。

（5）夸克的自旋量子数为 1/2，重子由三个夸克构成，介子由两个夸克构成。请用角动量耦合理论计算重子、介子自旋量子数的可能取值（设夸克的轨道角动量为零）。

第二题（25 分）

质量为 m 的粒子处于宽度为 a 的一维无限深方势阱中，初始波函数为

$$\psi(x,0)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le a/2 \\ A(x-a), & a/2\le x\le a \end{cases}$$

（1）求归一化常数 A；

（2）求 t 时刻发现粒子处于基态的几率；

（3）求 t 时刻发现粒子处于第一激发态的几率。

第三题（25 分）

（1）氢原子定态波函数 $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)$ 中，n，l 和 m 分别是什么量子数？请给出它们的取值范围；

（2）已知对氢原子 $n=2$，$l=1$ 的定态，径向波函数 R_{nl} 可以写成 $R_{21}=Nre^{-r/2a}$（这里 a 为波尔半径），求归一化常数 N，并对 ψ_{21m} 态计算 $<r>$。

第四题（25 分）

（1）对自旋 1/2 粒子，写出自旋算符 S_x，S_y 和 S_z 的矩阵形式（取 S^2，S_z 表象）。

（2）已知力学量 $A \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}$（$S_x + S_y$），求 A 的本征值和本征矢。

（3）记 S_z 的本征值为 $\hbar/2$ 的本征态为 χ。如果对 χ 测量力学量 A，求测量值及其几率。

第五题（25 分）

（1）一量子体系的哈密顿算符为 $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\phi^2}$，其中 $-\pi \le \phi \le \pi$，I 为正的常量。在周期性边界条件下【即 $\psi(\pi) = \psi(-\pi)$】，求体系的能级，并指明简并度。

（2）如果该体系受到微扰 $H' = \lambda \cos^2 \phi$（这里 λ 为小量），求基态与第一激发态的能量一级修正。

2013年浙江工业大学667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题 简答（50分）

（1）在量子力学中，为什么力学量算符是厄密算符？请简要说明。

（2）在量子力学中，守恒量算符是如何定义的？在中心力场，哪些是守恒量算符？

（3）以一个二重简并能级为例，说明简并微扰论中如何计算简并能级能量一级修正。

（4）考虑氦原子基态。基态波函数对两个电子的空间坐标交换是对称的还是反对称的？对两个电子的自旋变量交换是对称的还是反对称的？请简要回答，并说明理由。

（5）哪些物理效应或现象是量子力学中特有，而没有经典对应的？请举两例。

第二题（20分） 一质量为m的粒子，处于宽度为L的一维无限深方势阱中。初始时刻（$t=0$），势阱内粒子的波函数为$\Psi(x,0)=Cx(L-x), 0<x<L$，求：

（1）归一化常数C；（2）t时刻粒子的能量平均值；（3）t时刻粒子处于第一激发态的几率。

第三题（20分） 一粒子沿x轴正向，以能量E向一个“阶跃势”运动。该阶跃势在$x<0$时为零，在$x>0$时为$3E/4$，求：

（1）经典力学给出的粒子反射几率；（2）量子力学给出的粒子反射几率。

第四题（20分） 氢原子基态波函数为$\psi(r,\theta,\varphi)=C\exp(-r/a)$，这里$a$为玻尔半径。（1）求归一化常数$C$；（2）如果记在$r\to r+dr$的薄球壳内电子出现的几率为$P(r)dr$，求$P(r)$；（3）求最可几半径（在该半径附近电子出现的几率最大）。

第五题（20 分）已知力学量算符 A 定义为 $A=\frac{\hbar}{i}\frac{d}{d\varphi}$，这里 $0\le\varphi\le2\pi$；波函数满足周期性边界条件，即 $f(\varphi+2\pi)=f(\varphi)$。

（1）求 A 的本征值和归一化的本征函数;（2）如果对量子态 $f(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}(1+\cos\varphi)$ 测量力学量 A，求可能的测量值及其几率。

第六题（20 分）

一维谐振子 $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，基态和第一激发态归一化波函数分别为 $\psi_0(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp(\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2)$，$\psi_1(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}}x\exp(\frac{-m\omega}{2\hbar}x^2)$。考虑谐振子受到微扰 $H'=\lambda x$，这里 λ 是小量。用定态微扰论求：

（1）基态和第一激发态的能量一级修正;（2）基态能量的二级修正。

2014年浙江工业大学667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题（30 分）简答

（1）写出轨道角动量算符 L_x, L_y, L_z 之间的对易关系，并计算对易子 $[x, L_z]$，以及 $[p_y, L_x]$。

（2）请根据全同性原理分析：氢分子基态中，两个电子处于自旋单态还是自旋三重态？这时，这两个电子的总自旋是多少？

（3）请简要分析：为什么在束缚定态下，动量的平均值一定等于零？

第二题（24 分） 一维简谐振子 $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$，第一激发态归一化的定态波函数为

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\right) x e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$

已知 $t = 0$ 时，粒子的初始波函数为 $\Psi(x,0) = \begin{cases} A\psi_1(x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

(1)求归一化常数 A；(2)求 $t = 0$ 时位置的平均值；

(3)求 $t = 0$ 时能量的平均值。能量平均值随时间变化吗？

第三题（24 分） 质量为 m，能量为 E 的粒子从左向右射向势阱 $V(x) = -\alpha\delta(x)$。这里 E 和 α 都为正的常量，$\delta(x)$ 为狄拉克德尔塔函数。

(1)按照经典力学，粒子的反射几率等于多少？(2)求量子力学中粒子的反射几率。

第四题（24 分） 已知在三维中心势 $V(r)$ 中，一个质量为 m 的粒子处于定态，定态波函数为

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}，\ a \text{ 为常量}$$

(1)这个粒子的轨道角动量等于多少？(2)如果在无穷远处 $V(r)$ 趋于零，求该粒子的定态能量，并确定 $V(r)$ 的函数形式。(3) 求该粒子动能的平均值，势能的平均值。

第五题（24 分） 对于静止在 x 方向均匀磁场 B_0 中的电子，将描写其自旋状态演化的哈密顿量写成矩阵形式为

$$H = \frac{eB_0}{m}S_x = \frac{eB_0\hbar}{2m}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)如果 $t = 0$ 时自旋状态为 $\chi(0) = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$，求 t 时刻的自旋态 $\chi(t)$；

(2)求 t 时刻 S_x（自旋角动量 x 分量）的测量值及其几率。

第六题（24 分）一个二能级量子体系，其哈密顿量的矩阵形式为 $H=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$，这里矩阵元均为正的常量，且 a 和 b 均远小于 ε_1 和 ε_2。

(1) 如果 ε_1 和 ε_2 不相等，且 a 和 b 均远小于 $|\varepsilon_1-\varepsilon_2|$，用非简并微扰论求体系的能级（准确到二阶）；

(2) 如果 ε_1 和 ε_2 相等，用简并微扰论求体系的能级（准确到一阶）；

(3) 精确求解体系能级，并与微扰论的结果作比较。

2015年浙江工业大学667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题（30分）一质量为m的粒子，处于宽度为a的一维无限深方势阱中。初始波函数为

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}A & (0<x<a/2)\\ 0 & (a/2<x<a)\end{cases}$$

（1）求常数A，以及初始时刻粒子位置的不确定度。

（2）如果测量粒子能量，求测量值为基态能量值的概率。

第二题（30分）对简谐振子$H=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}+\dfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$引入升算符和降算符：

$$\hat{a}^+=\frac{m\omega\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}},\hat{a}^-=\frac{m\omega\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

（1）求对易子$[\hat{a}^+,\hat{a}^-]$以及$[\hat{a}^+,\hat{a}^+\hat{a}^-]$；

（2）已知降算符作用在基态波函数上结果为零，试分别求坐标空间的基态波函数和动量空间的基态波函数。

第三题（30分）$t=0$时氢原子波函数为

$$\frac{1}{\sqrt{10}}[2\psi_{100}+\psi_{210}+\sqrt{2}\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21,-1}]$$

（1）写出t时刻体系波函数，求t时刻体系能量平均（用电子伏特表示）。

（2）已知径向波函数

$$R_{10}=\frac{2}{a^{3/2}}e^{-r/a},R_{21}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{r}{a^{5/2}}e^{-r/2a}\text{（这里}a\text{是玻尔半径）}$$

求$t=0$时，在$r=0$附近、半径为$\dfrac{a}{100}$的球体内发现电子的概率(做近似计算)。

第四题（30 分）在标准基下，自旋为 1 的粒子的自旋分量S_x，其矩阵表示为

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）求S_x的本征值和归一化本征矢。

（2）对自旋态$\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$测量$S_x$，求测量值及其概率。

第五题（30 分）xy平面中的转子，其哈密顿量为$H = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$,这里$I$为转动惯量，$0 \le \varphi \le 2\pi$。

（1）求转子的能级和归一化能量本征函数。

（2）若转子受到如下微扰：$H' = \lambda\delta(\varphi - \pi)$，用一阶微扰论求转子基态和第一激发态的能级修正。

2016年浙江工业大学667量子力学考研真题

第一题（30 分）一质量为m的粒子，处于宽度为a的一维无限深方势阱中：

$$V(x)=\begin{cases}0 & (0<x<a)\\ \infty & (x<0,x>a)\end{cases}$$

（1）写出粒子能级和归一化定态波函数。
（2）求基态下，粒子位置的平均值和不确定度。
（3）求基态下，粒子动量的平均值和不确定度。

第二题（30 分）动能为E的粒子从左向右入射至如下“台阶势”：

$$V(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ V_0 & (x>0)\end{cases},\quad E>V_0>0$$

（1）分区列出定态薛定鄂方程，并写出解的形式。
（2）求粒子反射率和透射率，并验证两者之和为 1。
（3）如反射率为 1/4，求E/V_0的值。

第三题（30 分）（1）氢原子基态波函数的形式为

$$\psi_{100}=Ae^{-r/a}$$

求归一化常数A。
（2）写出基态能量值和玻尔半径值（分别以 eV 和 nm 为单位）。
（3）如果初始时刻归一化波函数为$\psi=Be^{-3r/a}$（这里，B为归一化常数），求测量能量得到基态能量值的概率。

第四题（30 分）在某一组正交归一基下，一量子系统的哈密顿量，其矩阵形式为

$$H=\hbar\omega\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

（1）求H的本征值和归一化本征矢。
（2）如果初态为$|\psi(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，求$t$时刻的态$|\psi(t)\rangle$。
（3）求t时刻能量的平均值。

第五题（30 分）（1）对简谐振子$H=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$引入升算符和降算符：

$$\hat{a}^+=\frac{m\omega\hat{x}-i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}},\hat{a}^-=\frac{m\omega\hat{x}+i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$$

已知降算符作用在基态波函数上结果为零，求坐标空间的归一化基态波函数。
（2）若简谐振子受到如下微扰：$H'=\begin{cases}\lambda x, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，这里$\lambda$为小量，请用一阶微扰论计算基态能量的一级修正。

2017年浙江工业大学667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。 ★★★★

第一题（25 分）

(1) 质量为 m 的粒子在一维势场 $V=V(x)$ 中运动，写出薛定谔方程和定态薛定谔方程。

(2) 求对易子 $[x^n, p_x]$，这里 x 和 p_x 为坐标和动量算符。

(3) 写出轨道角动量算符 L_x，L_y 和 L_z 之间的对易关系，并证明 $[L^2, L_x]=0$。

第二题（25 分）

质量为 m 的粒子在一维无限深势阱中运动，$V(x)=\begin{cases}0, & |x|<a\\ \infty, & |x|>a\end{cases}$，这里 a 为正常数。试求解定态薛定谔方程，得到定态能量和归一化的定态波函数。

第三题（25 分）

质量为 m 的粒子在一维谐振子势 $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中运动，ω 为振动角频率。如果 $t=0$ 时，粒子处于态 $\Psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_0(x)+c\psi_2(x)$，其中 $\psi_0(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 是基态和第二激发态的归一化能量本征函数，c 为待定的正常数。(1) 求常数 c；(2) 求 t 时刻波函数；(3) 求粒子能量测量值及其概率；(4) 求粒子位置和动量平均值。

第四题（25 分）

证明在半壁无限深方势阱 $V(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0<x<a\\ V_0, & x>a\end{cases}$ 中，存在束缚态的条件为 $V_0a^2\geq\frac{\pi^2\hbar^2}{8m}$，这里 $V_0>0$，m 为粒子质量。

第五题（25 分）

一个自旋 1/2 粒子的哈密顿量为 $H=\frac{\hbar\omega}{5}(3\sigma_z+4\sigma_x)$，这里 $\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 和 $\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 为泡利矩阵。(1) 求粒子能级和归一化的本征态；(2) 如果 $t=0$ 时，粒子处于自旋态 $\chi=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，求 t 时刻的自旋态。

第六题 （25分）

(1) 氢原子基态波函数为$\psi=\dfrac{e^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}$，这里$a$为玻尔半径。写出氢原子基态能量值和玻尔半径的值。

(2) 考虑氢原子的核（质子）不是点电荷，而为半径为R的均匀带电球体（R远小于a）。已知在该带电球体下，电子的势能为$V(r)=\begin{cases}\dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\\ \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}(\dfrac{r^2}{R^2}-3), & r<R\end{cases}$，试用微扰论计算氢原子基态能量的一级修正。

2018年浙江工业大学667量子力学考研真题

浙江工业大学

2018年硕士研究生招生考试试题

考试科目：(667)量子力学　　共 1 页

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题（25分）

一个质量为m的粒子在一维势场$V(x)$中运动，这里$x \geq 0$，且$x \to \infty$时，$V(x) \to 0$. 已知波函数$\psi(x) = A\left(\frac{x}{a}\right)^n \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$是能量本征函数，这里$A$，$a$和$n$均为正常数. 试求：（1）势能函数$V(x)$；（2）$\psi(x)$态下粒子的能量$E$.

第二题（25分）

一个质量为m的粒子在一维谐振子势$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$中运动。$t=0$时，初始波函数为$\Psi(x,0) = A\psi_0(x) - iB\psi_1(x)$，这里$\psi_0(x),\psi_1(x)$为基态和第一激发态的归一化波函数，$A,B$为正常数。已知$t=0$时，粒子能量平均值为$\frac{6}{5}\hbar\omega$. 试求：（1）$A$和$B$的值；（2）$t$时刻的波函数$\Psi(x,t)$；（3）粒子能量的不确定度（即标准偏差）.

第三题（25分）

L_x, L_y, L_z为轨道角动量算符的分量，p_x, p_y为动量算符的分量. 令$p_+ = p_x + ip_y$，$L_+ = L_x + iL_y$，试计算下列对易子：（1）$[L_x, p_+]$；（2）$[L_y, p_+]$；（3）$[L_z, L_+]$.

第四题（25分）

氢原子基态$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\exp(-r/a)$. 试计算$x$方向位置的不确定度（$\Delta x$）和动量的不确定度（$\Delta p_x$），检验不确定性关系.

第五题（25分）

在某组正交归一基下，一量子系统的哈密顿量为$H = A\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$，这里$A$为常量.

（1）试求该系统的能级和归一化的本征矢；（2）已知$t=0$时，初态为$\psi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，求$\psi(t)$.

第六题（25分）

一维无限深势阱（$0 \leq x \leq a$）中的粒子受到微扰：$H' = \begin{cases} 2\lambda\frac{x}{a}, & 0 < x < \frac{a}{2} \\ 2\lambda(1-\frac{x}{a}) & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$ 的作用，这里λ为小量. 求基态能量的一级修正.

2019年浙江工业大学理学院667量子力学考研真题

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。★★★★

第一题（25 分）

（1）设一个质量为m的粒子，沿x轴运动，势能为$V(x)$。

a. 写出体系的哈密顿算符$\hat{H}$和定态薛定谔方程。

b. 计算 $[\hat{H},x]$。

c. 对于定态，求动量的平均值$<p>$（仅考虑平方可积的态）。

（2）考虑下面算符

$$\hat{A}\psi(x)=x^3\psi(x), \qquad \hat{B}\psi(x)=x\frac{d\psi(x)}{dx},$$

其中$\psi(x)$是任意波函数，求对易式$[\hat{A},\hat{B}]$。

第二题（25分）

设粒子在下面势阱中运动，

$$V(x)=\begin{cases} V_0\,(\text{常数}), & 0\le x\le a \\ \infty & \text{其余区域。}\end{cases}$$

（1）求粒子的能量本征值和归一化本征函数。

（2）设$t=0$时其波函数是

$$\psi(x,t=0)=\sqrt{\frac{4}{5}}\psi_1+\sqrt{\frac{1}{5}}\psi_2$$

其中ψ_1,ψ_2 分别是基态和第一激发态的波函数。求t时刻的波函数$\psi(x,t)$。

第三题（25分）

（1） 写出轨道角动量算符各分量$(\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z)$的对易式。

（2） 设粒子处于$Y_{lm}(\theta,\varphi)$状态下，求L_x, L_y, L_x^2, L_y^2各量的平均值。