Table of Contents

内容简介
目　录
2009年宁波大学812量子力学考研真题（含答案）
2010年宁波大学812量子力学考研真题
2011年宁波大学812量子力学考研真题
2012年宁波大学812量子力学考研真题
2013年宁波大学872量子力学考研真题
2014年宁波大学872量子力学考研真题
2015年宁波大学872量子力学考研真题
2016年宁波大学872量子力学考研真题
2017年宁波大学872量子力学考研真题
2018年宁波大学872量子力学考研真题
2019年宁波大学872量子力学考研真题

2009年宁波大学812量子力学考研真题（含答案）

宁波大学 2009 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 (A 卷) 考码: 812 专业名称: 理论物理、凝聚态物理、光学

一、(35 分) 简要回答以下问题。

a) 写出索末菲的量子化条件。

b) 斯特恩-革拉赫实验证明了什么?

c) 已知在 $\hat{L}_z$ 表象中, $\hat{L}_y$ 的本征函数为:

$$\psi_{11}=\begin{pmatrix}1/2\\ i/\sqrt{2}\\ -1/2\end{pmatrix},\ \psi_{10}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\ \psi_{1-1}=\begin{pmatrix}1/2\\ -i/\sqrt{2}\\ -1/2\end{pmatrix}$$

, 则由 $\hat{L}_z$ 表象到 $\hat{L}_y$ 表象的变换矩阵 S 为?

d) 描写全同粒子体系状态的波函数有何特点?

e) 波函数 ψ 与 $K\psi$ 、$\psi e^{i\alpha}$ (K 、α 均为常数) 是否描述同一状态。

f) 自旋可以在坐标表象中表示吗?

二、(25 分) 设单粒子的归一化波函数为 $\psi(x,y,z)=\psi(\vec{r})$, 试用它表示出下列概率:

a) 粒子坐标 x 介于 x_1 与 x_2 之间, $x_1\le x\le x_2$

b) $x_1\le x\le x_2$, 同时粒子动量分量 $p_z\ge 0$

c) 粒子动量分量满足: $p_1\le p_x\le p_2$, $p_3\le p_y\le p_4$, $p_5\le p_z\le p_6$ 。

三、(20 分) 按要求证明:

a) 假设 A 、B 、C 是三个矩阵, 证明: $(ABC)^+=C^+B^+A^+$ 。

b) 证明厄米算符平方的对角元是非负的。

四、(20 分) 高速带电粒子在屏蔽库仑场中散射, 已知势可以写为:

$$V(r)=-\frac{Ze^2}{r}e^{-r/a}$$

, 求微分散射截面。

五、(25 分) 类氢原子中，电子与核的库仑作用能为$V(r)=-Ze^2/r$，当原子发生β衰变时，核电荷由$Ze\to(Z+1)e$，相互作用能增加了$H'=-e^2/r$。

a) 试用微扰论讨论体系基态能量的一级修正

b) 将结果与严格解比较，说明微扰论何时近似性较好。

六、(25 分) 试利用一维谐振子的基态波函数$\psi_0=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}e^{-\alpha^2x^2/2}$验证不确定关系$\Delta p\cdot\Delta x\geq\hbar/2$是得到满足的。

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

1) 部分球谐函数表达式：

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\quad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

2) Γ函数的积分表达式：

$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$，具有性质$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$

对于正整数n，$\Gamma(n)=(n-1)!$

其他特殊值$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。

3) 一些积分公式：

对于$a>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad \int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}},\quad \int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-ax^2}dx=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

4) 氢原子基态能级：$E_1=\frac{-\mu e^4}{2\hbar^2}=-\frac{e^2}{2a}$，其中$a=\frac{\hbar^2}{\mu e^2}$为玻尔半径。

氢原子基态波函数：$\psi_{100}=\left(\frac{1}{\pi a^3}\right)^{1/2}e^{-r/a}$。

宁波大学2009年攻读硕士学位研究生
入学考试试题参考答案及评分标准

考试科目 量子力学 (A卷) 考码 812 专业名称 理论物理、凝聚态物理、光学

命题教师 张珠峰

一、本题共35分。

a)

$$\oint p\mathrm{d}q = nh$$

其中 q 是电子的一个广义坐标，p 是对应的广义动量，回路积分沿运动轨道积一周，n 是正整数。

【评分标准】本小题6分，正确写出公式即得分。未写成圈积分得4分。

b) 1)半整数内禀角动量的存在；2)空间量子化的事实；3)电子自旋磁矩需引入2倍关系。

【评分标准】本小题6分。其中1) 4分，2)、3) 任答一点即得其余2分。

c)

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ \mathrm{i}/\sqrt{2} & 0 & -\mathrm{i}/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \end{pmatrix}$$

【评分标准】本小题5分。

d)描写全同粒子体系状态的波函数只能是对称的或者反对称的，它们的对称性不随时间变化。

【评分标准】本小题6分。答出是对称的或反对称的即可。

e) ψ 与 $K\psi$、$\psi e^{i\alpha}$ 描写的相对概率分布完全相同，描写的是同一状态。

【评分标准】本小题6分。

f) 自旋是内禀角动量，与空间运动无关，故不能在坐标空间表示出来。

【评分标准】本小题 6 分。答不能即可。

二、本题共 25 分。

a)

$$P_1 = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z |\psi(x,y,z)|^2$$

【评分标准】本小题 7 分。

b)

$$P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z'' \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}p_z \left\{ \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-ip_z(z'-z'')/\hbar} \cdot \left[\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \psi(x,y,z')\psi^*(x,y,z'') \right] \right\}$$

【评分标准】本小题 9 分。有 Fourier 变换意识可得 4 分。

c)

$$P_3 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p_x \int_{p_3}^{p_4} \mathrm{d}p_y \int_{p_5}^{p_6} \mathrm{d}p_z \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'')} \psi(\boldsymbol{r}')\psi^*(\boldsymbol{r}'') \right\}$$

【评分标准】本小题 9 分。有 Fourier 变换意识可得 4 分。

三、本题共 20 分。

a)因为

$$(ABC)^\dagger_{mn} = (ABC)^*_{nm} = \sum_{k,l} A^*_{nk} B^*_{kl} C^*_{lm} = \sum_{k,l} A^\dagger_{kn} B^\dagger_{lk} C^\dagger_{ml} = (C^\dagger B^\dagger A^\dagger)_{mn}$$

所以

$$(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$$

【评分标准】本小题 10 分。正确写出矩阵的分量表示得 2 分；知道厄米共轭的转置复共轭含义得 4 分。

b)对于厄米算符 A，其平方的对角元为

$$(A^2)_{nn} = \sum_m A_{nm} A_{mn} = \sum_m A^*_{mn} A_{mn} = \sum_m |A_{mn}|^2 \geq 0$$

【评分标准】本小题 10 分。正确写下厄米算符平方的对角元得 2 分；正确运用厄米算符的性质得 4 分。

四、本题共 20 分。

对于高速带电粒子的散射，可以利用玻恩近似求微分散射截面。

根据玻恩公式

$$q(\theta)=\frac{4m^2}{K^2\hbar^4}\left|\int_0^\infty rV(r)\sin(Kr)\mathrm{d}r\right|^2$$

我们有

$$q(\theta)=\frac{4m^2Z^2e^4}{K^2\hbar^4}\left|\int_0^\infty \sin(Kr)\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\right|^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(Kr)\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r &= \int_0^\infty \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kr}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kr})\mathrm{e}^{-r/a}\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-(1/a-\mathrm{i}K)r}-\mathrm{e}^{-(1/a+\mathrm{i}K)r})\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{\Gamma(1)}{1/a-\mathrm{i}K}-\frac{\Gamma(1)}{1/a+\mathrm{i}K}\right)\\ &= \frac{K}{(1/a)^2+K^2}\end{aligned}$$

其中我们利用了 Γ 函数的积分表达式。

所以

$$q(\theta)=\frac{4m^2Z^2e^4}{\hbar^4}\frac{1}{(K^2+1/a^2)^2}$$

其中 $K=2k\sin(\theta/2)$。

【评分标准】本小题 20 分。1）正确判断需用玻恩近似求微分散射截面得 4 分；2）正确写下玻恩公式得 8 分；3）积分过程及结果 8 分。

五、本题共 25 分。

a)由题意

$$\hat{H}_0=\hat{p}^2/(2m)-Ze^2/r$$

$$\hat{H}'=-e^2/r$$

$\hat{H}_0$ 的基态解为

$$E_1^{(0)} = -\frac{Z^2e^2}{2a}$$

$$\psi_{100} = \left(\frac{Z^3}{\pi a^3}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-Zr/a}$$

基态能级的一级修正为

$$E_1^{(1)} = \langle\psi_{100}|\hat{H}'|\psi_{100}\rangle = \frac{Z^3}{\pi a^3}(-e^2)(4\pi)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2Zr/a}\frac{1}{r}r^2\mathrm{d}r = -\frac{Ze^2}{a}$$

【评分标准】本小题 17 分。1)根据附录所给氢原子的相应公式（或直接写下）写下正确的类氢原子基态能级和基态波函数，各得 4 分共 8 分；2)正确写下基态能级一级修正，即 $E_1^{(1)} = \langle\psi_{100}|\hat{H}'|\psi_{100}\rangle$ 得 4 分；正确积分求得结果得 5 分。

b)β 衰变后，体系处于新的基态：

$$E_1'^{(0)} = -\frac{(Z+1)^2e^2}{2a}$$

此基态与衰变前的基态的能量差别在于

$$E_1'^{(1)} = E_1'^{(0)} - E_1^{(0)} = -\frac{e^2}{2a}[(Z+1)^2 - Z^2] = -\frac{e^2}{a}\left(Z+\frac{1}{2}\right)$$

微扰论的结果和严格解的差别为：严格解多出一项 $-e^2/(2a)$。当 Z 较大时，这一项的相对贡献较小，微扰论可得到较好的近似。

【评分标准】本小题 8 分。1）正确写下新基态的严格解得 3 分；2）明确说明 Z 较大时微扰论结果较好得 5 分。

六、本题共 25 分。

$$\langle x\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\mathrm{d}x = 0$$

其中利用了奇函数的性质。

同样地，

$$\langle p\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}(-\mathrm{i}\hbar)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\hbar\alpha^2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle =&\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}(\alpha^2x^2)^{1/2}\mathrm{d}(\alpha^2x^2)\\ =&\frac{2}{2\alpha^2\sqrt{\pi}}\Gamma(3/2)=\frac{1}{2\alpha^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle =&\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}(-\mathrm{i}\hbar)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}\mathrm{d}x\\ =&(-\hbar^2\alpha^2)\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}(\alpha^2x^2-1)\mathrm{d}x\\ =&-\hbar^2\alpha^2\left(\alpha^2\frac{1}{2\alpha^2}-1\right)=\alpha^2\hbar^2/2\end{aligned}$$

所以

$$\Delta p\cdot\Delta x=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}\cdot\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\hbar/2$$

满足不确定关系 $\Delta p\cdot\Delta x\geq\hbar/2$。

【评分标准】本题 25 分。1）正确得出 $\langle x\rangle$ 和 $\langle p\rangle$ 各得 3 分；2）正确求得 $\langle x^2\rangle$ 和 $\langle p^2\rangle$ 各得 6 分；3）知道如何用 $\langle x\rangle$ 等表达不确定度得 5 分；4）正确求出 $\Delta p\cdot\Delta x$ 得 2 分。

2010年宁波大学812量子力学考研真题

宁波大学 2010 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 (A 卷) 考码: 812 专业名称: 理论物理、凝聚态物理、光学

一、(25 分) 简要回答下列问题。

(1) 设粒子波函数为 $\psi(\vec{r},t)$，写出粒子几率流守恒方程。

(2) 写出跃迁的黄金规则的公式，简要说明式中各项的意义。

(3) 写出两个电子的对称自旋波函数和反对称自旋波函数。

(4) $\hat{L}_x$，$\hat{L}_y$，$\hat{L}_z$ 有没有共同的本征态?

(5) 对于吸收或发射一个光子的原子态，试叙述电偶极选择定则。

二、(10 分) 设 $t=0$ 时，粒子的状态为 $\psi(x)=A(\sin^2 kx+\frac{1}{2}\cos kx)$，求此时粒子的平均动量和平均动能。

三、(10 分) 证明 $\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z=i$。

四、(10 分) 设在球坐标中，粒子波函数为 $\psi(r,\theta,\varphi)$，试求:

(1) 在球壳 $(r,r+dr)$ 中找到粒子的概率;

(2) 在 (θ,φ) 方向的立体角 $d\Omega$ 中找到粒子的概率。

五、(15 分) 证明在 $\hat{L}_z$ 的任何一个本征态下，$\hat{L}_x$ 和 $\hat{L}_y$ 的平均值为零。

六、(20 分) 设氢原子的波函数 ($t=0$ 时刻) 为

$$\psi(\vec{r},0)=(1/2)\psi_{100}(\vec{r})+(1/3)\psi_{210}(\vec{r})+(\sqrt{3}/3)\psi_{211}(\vec{r}),$$

其中 $\psi_{nlm}(\vec{r})$ 是定态空间波函数。

(1) 求 t 时刻的平均能量 (用基态能量 E_1 表达出来)。

(2) 求 t 时刻氢原子具有能量 E_2 的几率。

(3) 求 t 时刻氢原子相应轨道角动量在 z 方向的投影为零的几率。

七、(20 分) 一个粒子在有一小势坑的一维盒子中运动，

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ -b & 0<x<l/2\\ 0 & l/2<x<l\\ \infty & x>l\end{cases}$$

将该势坑视为一维无限深势阱的微扰，求出基态的第一级能量修正。

八、(20 分) 已知在 $\hat{\vec{L}}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的共同表象中，算符 $\hat{L}_x$ 的矩阵为：

$$\hat{L}_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}。$$

(1) 在此表象下求出 $\hat{L}_x$ 的本征值和归一化的本征函数。

(2) 若体系处于态 $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，问测量 $\hat{L}_x$ 得 0 的概率是多大。

九、(20 分) 求一维谐振子处在第一激发态时概率最大的位置。

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

1) 部分球谐函数表达式：

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\ Y_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\ Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\ Y_{1,-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}\ 。$$

2) 线性谐振子对应于能量 E_n 的波函数：$\psi_n(x)=N_n e^{-\alpha^2x^2/2}H_n(\alpha x)$，其中

$$N_n=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}2^n n!}\right)^{1/2}。$$

2011年宁波大学812量子力学考研真题

宁波大学 2011 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 (A 卷) 考码: 812 专业名称: 理论物理、凝聚态、光学

一、简答题（每题 6 分，共 30 分）

1. 试列举厄米算符的性质。
2. 辏力场中 s 分波微分散射截面的角分布有何特点？
3. 使用定态微扰论时，对哈密顿量 H 有什么样的要求？
4. 用球坐标表示的粒子波函数为$\psi(r,\theta,\varphi)$，则粒子在(θ,φ)方向的立体角$d\Omega$中且半径在$0<r<a$范围内被测到的概率是多大？
5. 简述态迭加原理。

二、（本题 10 分）求下列状态中$\hat{j}^2,\hat{j}_z$的本征值（$\vec{j}=\vec{L}+\vec{S}$）

（1）$\psi_1=\chi_{1/2}(S_z)Y_{11}(\theta,\varphi)$

（2）$\psi_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\{\sqrt{2}\chi_{1/2}(S_z)Y_{10}(\theta,\varphi)+\chi_{-1/2}(S_z)Y_{11}(\theta,\varphi)\}$

（3）$\psi_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\{\sqrt{2}\chi_{-1/2}(S_z)Y_{10}(\theta,\varphi)+\chi_{1/2}(S_z)Y_{1-1}(\theta,\varphi)\}$

（4）$\psi_4=\chi_{-1/2}(S_z)Y_{1-1}(\theta,\varphi)$

三、（本题 15 分）设量子体系的束缚态能级和归一化能量本征态分别为E_n和ψ_n（n为量子数或编号），设λ是$\hat{H}$含有的任何一个参数，证明：$\frac{\partial E_n}{\partial\lambda}=\langle\psi_n|\partial\hat{H}/\partial\lambda|\psi_n\rangle$。

四、（本题 15 分）设氢原子处于状态$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\varphi)+\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)$，求

（1）能量算符$\hat{H}$，角动量平方算符$\hat{L}^2$和角动量 z 分量$\hat{L}_z$的可能取值；

（2）上述三个量取各个可能值的概率；

（3）上述三个量的平均值。

五、（本题 20 分）在σ_z表象中，求σ_x和σ_y的本征值和本征函数。

六、（本题 20 分）氢原子处于基态$\psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$，求

（1）势能$-e^2/r$的平均值；

（2）最可几半径。

七、（本题 20 分）一个质量为m的粒子在一维无限深势阱（$0<x<a$）中运动，其量子态为

$$\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{a}+\sqrt{\frac{3}{4}}\sin\frac{3\pi x}{a}\right)$$，问

（1） 该量子态是不是能量的本征态？

（2） 对该系统进行能量测量，其可能的结果及所对应的概率是多少？

（3） 处于该量子态粒子能量的平均值是多少？

八、（本题 20）在时间$t=0$时，一个线性谐振子处于下列归一化的波函数所描写的状态：

$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{1}{5}}\psi_0(x)+\sqrt{\frac{1}{2}}\psi_2(x)+c\psi_3(x)$，其中$\psi_n(x)$是谐振子的第$n$个本征函数。

（1）试求c的数值；

（2）写出在t时刻的波函数；

（3）在$t=0$时振子能量的平均值是多少？$t=1s$时又是多少？

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

Γ函数的积分表达式：

$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$，具有性质$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$

对于正整数n，$\Gamma(n)=(n-1)!$

特殊值：$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。

2012年宁波大学812量子力学考研真题

宁波大学 2012 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 (A 卷) 考码: 812 专业名称: 理论物理、凝聚态物理、光学、光电子学、固体电子物理

一、简答题（每题 5 分，共 30 分）

1. 量子力学中，体系的任意态$\psi(x)$可用一组力学量完全集的共同本征态$\psi_n(x)$展开：$\psi(x)=\sum_n c_n\psi_n(x)$，写出展开系数$c_n$的表达式。
2. 一个粒子波函数为$\psi(x,y,z)$，则粒子位于$x\sim x+dx$之间的概率是多少？
3. 对于球对称势垒的低能散射，第l个分波的相移正负号如何？
4. 厄米算符$\hat{A}$与$\hat{B}$对易，而$\hat{B}$又与$\hat{C}$对易，则$\hat{A}$与$\hat{C}$是否一定也对易？若不是，试举例说明。
5. 对于定态，是否概率流密度必为零？
6. 某体系由 3 个全同的玻色子组成，玻色子之间无相互作用。玻色子只有 2 个可能的单粒子态ψ_1和ψ_2。问：体系的可能状态有几个？它们的波函数怎样用单粒子波函数构成？

二、（本题 10 分）设$\hat{\vec{A}},\hat{\vec{B}}$为矢量算符，$\hat{F}$为标量算符，证明

$[\hat{F},\hat{\vec{A}}\cdot\hat{\vec{B}}]=[\hat{F},\hat{\vec{A}}]\cdot\hat{\vec{B}}+\hat{\vec{A}}\cdot[\hat{F},\hat{\vec{B}}]$。

三、（本题 15 分）一个算符$\hat{f}$描述自旋 1/2 的粒子间的相互作用，具有形式$\hat{f}=a+b\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$，其中$a,b$是常数。总自旋$\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2=\frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)$。试证明$\hat{f}$，$\hat{S}^2$，$\hat{S}_z$可同时测量。

四、（本题 15 分）已知描述单粒子一维束缚态的两个本征函数分别为：

$\psi_1=Ae^{-\alpha x^2/2}$，$\psi_2=B(x^2+bx+c)e^{-\alpha x^2/2}$，试求这两个状态的能级间隔。

五、（本题 20 分）泡利矩阵在$\hat{\sigma}_z$表象中可以明确地写作

$$\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}。$$

（1）求$\hat{\sigma}_x$在$\hat{\sigma}_z$表象中的本征态矢量；

（2）求$\hat{\sigma}_z$表象到$\hat{\sigma}_x$表象的变换矩阵$\hat{S}$；

（3）证明：$\hat{S}^+\hat{\sigma}_x\hat{S}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$。

六、（本题 20 分）在$t=0$时刻，氢原子的波函数为

$$\psi(r,0)=\frac{1}{\sqrt{10}}[2\psi_{100}+\psi_{210}+\sqrt{2}\psi_{211}+\sqrt{3}\psi_{21-1}]$$。忽略自旋和辐射跃迁，

问：(1) $t=0$时刻该体系能量的平均值是多少？（用氢原子基态能量表达）

(2) 在t时刻体系处于$l=1,m=1$态的概率是什么？

七、（本题 20 分）一个质量为m的粒子，被限制在一维区域$0\le x\le a$内（即处于一维无限深势阱内）。$t=0$时其归一化的波函数为

$$\psi(x,t=0)=\sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}$$

（1） $t=0$时粒子所处的状态是不是能量的本征态？

（2） 在后来的某一时刻$t=t_0$时波函数是什么？

（3） 体系在$t=0$和$t=t_0$时的平均能量是多少？

八、（本题 20 分）试用变分法求解$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+bx^4$的基态能量，其中$b$是一个常数。试探波函数取为$\phi(x)=Ae^{-\lambda x^2}$，$A$是归一化常数。

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

对于$a>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^4e^{-ax^2}dx=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

2013年宁波大学872量子力学考研真题

宁波大学 2013 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(A 卷) (答案必须写在答题纸上)

考试科目：量子力学　　科目代码：872

适用专业：理论物理\凝聚态物理\光学\光电子学\固体电子物理

一、简答题（每题 5 分，共 30 分）

1. 算符 $\hat{A},\hat{B}$ 反对易，即 $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}=0$，若 $\hat{A},\hat{B}$ 存在共同的本征态 ψ_{ab}：$\hat{A}\psi_{ab}=a\psi_{ab}$，$\hat{B}\psi_{ab}=b\psi_{ab}$，则 $ab=$？

2. 如果力学量 $\hat{F}$ 在态系 $\{\psi_i\}$ 中的平均值 $\overline{F}_i=0(i=0,1,2,...)$，则在状态 $\psi=\sum_i c_i\psi_i$ 中是否必有 $\overline{F}=\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle=0$？

3. 考虑由 2 个全同玻色子构成的体系，设可能的单粒子态为 ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3，则体系可能的状态有哪些？

4. 若粒子状态在一从 $t=0$ 开始作用的周期性微扰 $\hat{H}'=\hat{F}\cos\omega t$（$\hat{F}$ 是与时间无关的微扰算符）作用下由能量本征态 $|k\rangle$ 态（能量 E_k）跃迁到了能量本征态 $|m\rangle$ 态（能量 E_m），则两个能级应满足什么条件？

5. 幺正变换有什么特点？

6. 为什么研究散射问题时，通常只限于势场作用范围外的散射波？

二、（本题 10 分）在一维无限深势阱问题求解中，假定在势阱内 $V(x)=V_0\neq 0$（其中 V_0 为常数），这对波函数和能级是否有影响？怎样影响？

三、（本题 15 分）对于自旋 1/2 的粒子，在 $\hat{S}_z$ 表象中计算 $\hat{S}_i|+1/2\rangle$ 和 $\hat{S}_i|-1/2\rangle$，$i=x,y,z$，其中 $|+1/2\rangle$ 和 $|-1/2\rangle$ 是 $\hat{S}_z$ 的本征态矢。将 $\hat{S}_x+i\hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_x-i\hat{S}_y$ 作用于 $|+1/2\rangle$ 和 $|-1/2\rangle$ 结果怎样，这些算符有什么特性？

四、（本题 15 分）假定一电子状态由波函数 $\psi=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(e^{i\varphi}\sin\theta+\cos\theta)g(r)$ 描述，其中 $\int_0^\infty|g(r)|^2r^2dr=1$。问：处于该态的电子的轨道角动量 z 分量 L_z 的可能的测量结果是什么，相应值出现的概率是多少？

五、（本题 20 分）考虑一个在一维无限深势阱中运动的质量为 m 的粒子，其所受势场为 $V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le a\\ \infty & x<0,x>a\end{cases}$，现给粒子加一个额外的小势场 $V'(x)=a\lambda\delta(x-a/2)$，其中 λ 是一个很小的实常数，试用微扰论求解粒子基态和第一激发态能级的一级修正。

六、（本题 20 分）设体系 $\hat{H}$ 的两个不同本征值 E_1, E_2 相应的归一化本征函数为 $u_1(\vec{r}), u_2(\vec{r})$。力学量算符 $\hat{F}$ 与 $\hat{H}$ 不对易，它的两个不同本征值 f_1, f_2 相应的归一化本征函数为 $\psi_1 = (1/\sqrt{2})(u_1 + u_2)$，$\psi_2 = (1/\sqrt{2})(u_1 - u_2)$。假定 $t = 0$ 时体系处于 $\Psi(0) = \psi_1$ 态之中，试求出 $t > 0$ 时刻力学量 F 的平均值 $\overline{F}(t)$。

七、（本题 20 分）处于基态的氚（^3H）可以放出 β 粒子（电子）而自发衰变成 $^3He^+$ 离子。电子离开如此之快，整个过程只显示出核电荷从 $Z = 1$ 变到 $Z = 2$。试计算最终 He^+ 留在基态的概率。

八、（本题 20 分）试证明 $\psi(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \alpha x$ 是线性谐振子的波函数（其中 $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$），并求此波函数对应的能量及量子数 n。

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

1）部分球谐函数表达式：

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi},\quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta,\quad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}$$

2）Γ 函数的积分表达式：

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$，具有性质 $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

对于正整数 n，$\Gamma(n) = (n-1)!$

其他特殊值 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$。

3）氢原子基态波函数：$\psi_{100} = \left(\frac{1}{\pi a^3}\right)^{1/2} e^{-r/a}$。

2014年宁波大学872量子力学考研真题

宁波大学 2014 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(A 卷) (答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学　　科目代码: 872

适用专业: 理论物理、凝聚态物理、光学、光电子学、固体电子物理

一、　简答题（每题 5 分，共 30 分）

1. 说明德布罗意的主要物理贡献, 写出必要的公式.

2. $\hat{L}_x$，$\hat{L}_y$，$\hat{L}_z$ 的对易关系是什么?它们有没有共同的本征态?

2. 微观粒子的全同性原理指什么?

4. 两个光子在一定条件下可以转化为正负电子对。如果两光子的能量相等，问要实现这种转化，光子的波长最大是多少?

5. 写出海森堡测不准关系.

6. 设粒子波函数为 $\psi(\vec{r},t)$，写出粒子几率流守恒方程.

二、（本题 10 分）设动量为 $\vec{p}$ 的自由粒子波函数为 $\Psi(\vec{r},t)=Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r}-Et)}$
试求：所满足的波动方程

三、（本题 15 分）在 σ_z 表象中，$\sigma_n=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{bmatrix}$。求 σ_z 在 σ_n 表象中的本征值和本征函数?

四、（本题 15 分）求有三个全同的玻色子组成的体系的所有可能状态

五、（本题 20 分）设哈密顿量在能量表象中的矩阵是

$$\begin{pmatrix}E_1^{(0)}+a & b\\ b & E_2^{(0)}+a\end{pmatrix}$$

其中 a,b 为实数，用微扰公式求能量至二级修正值并与严格解比较。

六、（本题 20 分）试探波函数具有 $Ce^{-\alpha x^2}$ 的形式，其中 C 为归一化系数，α 为与 x 无关的变分参数。试用变分法求谐振子的基态波函数和基态能量，最后把归一化系数 C 算出来。

七、（本题 20 分）设实算符 $\hat{A}$ 满足 $\hat{A}^2-3\hat{A}+2=0$，这是 $\hat{A}$ 满足的最低阶方程. 求
(a)它的本征值. (b) $\hat{A}$ 的自身表象里相应的本征态是什么？(c) $\hat{A}$ 是否为可观察量？

八、（本题 20 分）平面转子处于状态 $\psi=A\cos^2\phi$ 中，求角动量 L_z 的可能值及其出现的几率，并求出角动量的平均值和能量的平均值。

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

1）部分球谐函数表达式：

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_{1,1}=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\quad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_{1,-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

2）Γ 函数的积分表达式：

$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$，具有性质 $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$

对于正整数 n，$\Gamma(n)=(n-1)!$

其他特殊值 $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。

3）氢原子基态波函数：$\psi_{100}=\left(\frac{1}{\pi a^3}\right)^{1/2}e^{-r/a}$。

2015年宁波大学872量子力学考研真题

宁波大学 2015 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(A 卷) (答案必须写在答题纸上)

考试科目: 量子力学 科目代码: 872

适用专业: 理论物理、凝聚态物理、光学、光电子学、固体电子物理

一、 简答题（每题 5 分，共 30 分）

1. 厄米算符的定义是什么？算符 $x\dfrac{d}{dx}$ 是否厄米？

2. 若两个厄米算符有共同本征态,它们是否一定对易?

3. 微观粒子的全同性原理指什么?

4. 写出玻尔-索末菲量子化条件的形式。

5. 写出海森堡测不准关系.

6. 试给出本征波函数的正交归一关系并说明它们在分立本征谱和连续本征谱的区别.

二、（本题 10 分）对于一维自由粒子,$t=0$ 时粒子波函数为 $\Psi(x,0)=\delta(x)$,

试求：t 时刻的波函数 $\Psi(x,t)$.

三、（本题 15 分）在 σ_z 表象中, 求:

(1) $\exp(i\lambda\sigma_z)\sigma_x\exp(-i\lambda\sigma_z)$,

(2) $\exp(i\lambda\sigma_z)\sigma_y\exp(-i\lambda\sigma_z)$.

四、（本题 15 分）一个质量为 m 的粒子受力 $\vec{F}(\vec{r})=-\nabla V(\vec{r})$ 作用, 使其波函数满足动量空间的薛定谔方程: $(\dfrac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}-a\nabla_p^2)\varphi(\vec{p},t)=i\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{p},t)$, 其中 $\hbar=1$, a 是某一实常数, 并且,

$\nabla_p^2=\dfrac{\partial^2}{\partial p_x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial p_y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial p_z^2}$, 求力 $\vec{F}(\vec{r})$

五、（本题 20 分）某个状态 $|\psi\rangle$ 是 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的本征态, $\hat{L}^2|\psi\rangle=l(l+1)\hbar^2|\psi\rangle$,

$\hat{L}_z|\psi\rangle=m\hbar|\psi\rangle$,在此态下求 $\langle\psi|\hat{L}_x|\psi\rangle$, $\langle\psi|\hat{L}^2{}_x|\psi\rangle$。

六、（本题 20 分）平面转子处于状态 $\psi=A\cos^2\phi$ 中，求角动量 L_z 的可能值及其出现的几率，并求出角动量的平均值和能量的平均值。

七、（本题 20 分）对厄米算符 $\hat{A}$，证明任何表象中有 $\det(\exp[\hat{A}]) = \exp[tr(A)]$。

八、（本题 20 分）在海森堡图像中,对一维谐振子 $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$，计算

$x(t) = e^{iHt/\hbar} x e^{-iHt/\hbar}$，$p(t) = e^{iHt/\hbar} p e^{-iHt/\hbar}$，

[以下式子仅供参考，可能并非完全必要。]

1）部分球谐函数表达式：

$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$，$Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$，$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$，$Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\varphi}$

2）Γ 函数的积分表达式：

$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$，具有性质 $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

对于正整数 n，$\Gamma(n) = (n-1)!$

其他特殊值 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$。

3）氢原子基态波函数：$\psi_{100} = \left(\frac{1}{\pi a^3}\right)^{1/2} e^{-r/a}$。

4）$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\xi^2] d\xi = \sqrt{\pi} \exp[-i\pi/4]$

2016年宁波大学872量子力学考研真题

宁波大学 2016 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(B 卷) (答案必须写在答题纸上)

考试科目：量子力学　　科目代码：872

适用专业：理论物理、凝聚态物理、光学、光电子学、固体电子物理

一、简答题：

本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

1. 请画出微观粒子的双缝干涉示意图。(注意：不是衍射图)

2. 请列出量子力学四条基本假设。（多列的只根据前四条给分）

3. 量子力学的波函数与经典波函数有哪些不同？

4. 假设系统处在量子态 $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$

   上，ψ_1与ψ_2为系统算符$\hat{A}$的两个归一化本征态，其本征值分别为Q_1和Q_2，c_1, c_2为复常数。

   问：（1）若对系统力学量$\hat{A}$进行测量，可能的结果是什么？
   （2）其几率分别是多少？

5. 写出下列对易关系：
   $\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right]=?$，$\left[\hat{L}_x, \hat{r}\cdot\hat{p}\right]=?$ （提示：$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$）

6. 求$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$与$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$的本征值与对应的本征矢。

二、计算题（120 分）

1. 氢原子处在基态，$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0}} e^{-\frac{r}{a_0}}$，

   求（1）r 的期望值；（7 分）

   （2）动能的期望值。（8 分）

2. 一个质量为 m 的粒子被限制在一维无限深势阱（0<x<a）中，t=0 时其归一化波函数为

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a},$$

   （1）在后来某一时刻$t=t_0$时的波函数是什么？（5 分）

（2）体系在$t=0$和$t=t_0$时刻的平均能量是多少？（5分）

（3）$t=t_0$时，于势箱左半部（$0\le x\le \frac{a}{2}$）发现粒子的几率是多少？（5分）

（提示：先写出或求出一维无限深势阱（0<x<a）的本征态与能量本征值）

3. 在外磁场中，一个自旋为1/2带电+e的粒子的哈密顿量为

$$\hat{H}=-(g/2)\frac{e}{mc}\hat{s}\cdot\hat{B}.$$

设$\hat{B}=B\hat{j}$（$\hat{j}$是y方向的单位矢）。计算算符$\hat{s}_z(t)$。

提示：在海森堡表象中，$\frac{d\hat{s}}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[\hat{s},\hat{H}]$.　　（20分）

4. 记$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$为Pauli矩阵，定义$\sigma_\pm=\sigma_1\pm i\sigma_3$，

（1）计算$[\sigma_+,\sigma_-]$，$[\sigma_3,\sigma_+],[\sigma_3,\sigma_-],(\sigma_+)^2,(\sigma_-)^2$；（10分）

（2）化简 $\exp(\xi\sigma_3)\sigma_1\exp(-\xi\sigma_3)$，$\exp(-\xi\sigma_3)\sigma_2\exp(\xi\sigma_3)$.（10分）

提示：$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

5. 考虑自旋为1/2的系统，a)求出算符$A\hat{s}_y+B\hat{s}_z$的本征值以及归一化本征函数。其中$\hat{s}_y,\hat{s}_z$是角动量算符，A，B是实常数。b) 假定此系统处在以上算符的一个本征态上，求测量$\hat{s}_y$得到结果为$\hbar/2$的几率，泡利矩阵为

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$ （20分）

6. 已知一量子体系的Hamiltonian在某力学量表象中的表示为

$$\hat{H} = E_0\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $E_0, \varepsilon > 0, \varepsilon << E_0$，试用微扰方法求二级近似能量与一级近似态矢量。（20 分）

7. 谐振子的哈密顿量可以用无量纲单位（$m = h/2\pi = \omega = 1$）写成

$$\hat{H} = (\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}),$$

其中 $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p}),$

假设，某个未归一化的能量本征函数为 $\Psi_a = (2x^3 - 3x)e^{-x^2/2}$，

求能量最接近 Ψ_a 的两个本征函数（不需要归一化）。（10 分）

**可能需要用到的积分公式

1）$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$,

2）$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$,

3）$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$,

4）提示：积分$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx$可以从公式 3）导出，

5）$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]$.

2017年宁波大学872量子力学考研真题

宁波大学2017年硕士研究生招生考试初试试题(B卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 872　　科目名称: 量子力学

适用专业: 理论物理 凝聚态物理 光学 光电子学 固体电子物理

一、 简答题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。

1. 为什么说德布罗意将实物粒子的波动性与粒子性联系起来了？

2. 写出轨道角动量相关算符$\hat{L}^2,\hat{L}_z$的共同本征函数（只要标示量子数与变量即可）以及本征值。

3. 已知

$$\hat{p}_r=-i\hbar\left(\hat{r}+\frac{\partial}{\partial r}\right),$$

证明

$$[\hat{r},\hat{p}_r]=i\hbar.$$

4. 化简 $\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

二、 计算题1：本大题共2小题，每小题10分，共20分。

1. 试写出一维自由粒子平面波波函数，并验证它满足Schrodinger方程。

2. 若一个量子系统的波函数用下列高斯波包表示

$$\psi(x)=\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right),$$

求该系统在该状态下的位置与动量的不确定度，并验证不确定关系。

三、 计算题2：本大题共4小题，每小题15分，共60分。

1. (1) 求$\hat{L}_x$在 $\hat{L}^2$，$\hat{L}_z$共同表象，l = 1 子空间中的矩阵表示；

(2) 求出其归一化本征矢。其中$\hat{L}^2$，$\hat{L}_x$，$\hat{L}_z$分别为角动量的平方，角动量x，z方向分量。

【提示：$\hat{L}^2$，$\hat{L}_z$共同本征函数--球谐函数Y_{lm}有如下关系$\hat{L}_\pm Y_{lm}=\hbar\sqrt{(l\pm m+1)(l\mp m)}Y_{lm\pm1}$，其中$\hat{L}_\pm=(\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y)$】。

2. 电子在均匀电场$\vec{E}=(\varepsilon,0,0)$中运动，其Hamiltonian为

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}-e\varepsilon x,$$

试判断$\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$是否为守恒量，并说明为什么。

3. 计算下列坐标、动量、轨道角动量、与泡利算符相关算符的对易关系

$$[x,p_y]=$$
$$[z,p_z]=$$
$$[L^2,L_z]=$$
$$[L_y,p_z]=$$
$$[L_x,L_z]=$$
$$[y,L_z]=$$
$$[\sigma_y,\sigma_x]=$$

4. 求Hermite算符

$$\hat{F}=\alpha\hat{p}_x+\beta x$$

的本征值为f的归一化本征函数。（提示：该本征态为一个连续变量本征态，归一化到一个δ函数）

四、 计算题3：本大题共2小题，每小题20分，共40分。

1. 自由转子----假设有一个量子的自由转子可以在xy平面自由转动，其转动惯量为I_z，设转动角用φ表示，角动量用J_z表示。

求：（1）能量的本征值与本征函数；

（2）若出事时刻$\psi(0)=A\sin^2\varphi$，求此后某t时刻$\psi(t)$.

提示：系统的Hamiltonian可写为$\hat{H}=\dfrac{\hat{J}_z^2}{2I_z}$。

2. 设粒子在一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases}0,|x|\le a/2,\\ \infty,|x|>a/2.\end{cases}$$

（1）求其波函数，（2）并求其中的基态（n=1）的动量分布。

五、 计算题 4：本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分。

1. 一具有磁矩 $\hat{\mu}=\mu_e\hat{s}$（$\hat{s}$ 具有 1/2 自旋幅）的粒子，放于沿 x 轴方向的常磁场中。在 t=0 时刻，发现粒子具有 $s_z=1/2$，求在以后任意时刻发现粒子具有 $s_y=+1/2$ 和 $s_y=-1/2$ 的几率。

**可能需要用到的积分公式

1）$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$，

2）$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$，

3）$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}dx=\frac{n!}{2a^{n+1}}$，

4）提示：积分 $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx$ 可以从公式 3）导出，

5）$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]$.

2018年宁波大学872量子力学考研真题

一、简答题（每题5分，共20分）

1何为守恒量？一个力学量是一个体系的守恒量的条件是什么？

$$[A,B]=i\hbar$$

2已知

试写出ΔA、ΔB满足的不确定关系。

3试用全同性原理解释泡利不相容原理。

4算符A、B均为厄米（Hermite）算符，问算符C＝i[A，B]是否为厄米算符？简述理由。

二、（本题10分）设体系处于状态 $\psi=c_1Y_{11}+c_2Y_{20}$（波函数已归一化，即 $|c_1|^2+|c_2|^2=1$）。求：

（1）角动量的z轴分量，即 l_z 的可能测值及相应几率；

（2）l^2 的可能测值及相应几率，其中l为角动量。

三、（本题10分）证明厄米算符的本征值为实数。

四、（本题15分）考虑 $|lm\rangle$ 态矢空间的l＝1子空间，并取 $\hbar=1$ 求（l^2，l_z）表象中 l_x、l_y、l_z 的矩阵表示，并求出 l_x、l_y 的本征值、本征矢。

五、（本题15分）电子在均匀电场中运动，哈密顿量为

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+e\varepsilon y$$

判断p_x、p_y、l_y、l_z中哪几个力学量为守恒量，需明确写出对易关系。

六、（本题15分）设A(∧)、B(∧)是与σ(∧)对易的任意矢量算符，证明：（σ(∧)·A(∧)）·（σ(∧)·B(∧)）＝A(∧)·B(∧)＋iσ(∧)·（A(∧)×B(∧)）

七、（本题15分）设体系的束缚能级和归一化能量本征态分别为E_n和ψ_n，n为标记包含

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda}=\left\langle \psi_n \left| \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right| \psi_n \right\rangle$$

哈密顿量H在内的力学量完全集的本征态的一组好量子数。设H含有一个参数λ，证明：

八、（本题20分）由两个非全同粒子（自旋均为$\frac{\hbar}{2}$）构成的体系，设粒子间相互作用为H＝As_1s_2（不考虑轨道运动）。设初始时刻（t＝0）粒子1自旋“向上”（s_{1z}＝1/2），粒子2自旋“向下”（s_{1z}＝－1/2）。求时刻t（＞0）：

（1）粒子1自旋向上的概率；

（2）粒子1和2自旋均向上的概率；

（3）总自旋s＝0及s＝1的概率。

九、（本题20分）在以下两种情况中计算入射粒子在一维阶跃势上的反射率R与透射率

$$V(x)=\begin{cases}0, x<0\\ V_0, x>0\end{cases}$$

T

（1）E＞V_0；

（2）E＜V_0。

十、（本题10分）在球对称谐振子势阱V（x）＝mω^{2}r^2/2中运动的粒子，受到微扰作用

$$H' = \lambda xyz + \frac{\lambda^2}{\hbar\omega} x^2 y^2 z^2$$

为

λ为小量。计算基态能级的移动（准确到λ^2）。

（提示：$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^+ + \hat{a}\right)$，其中a(∧)$^+$、a(∧)为谐振子的产生、湮灭算符。）

2019年宁波大学872量子力学考研真题

宁波大学2019年硕士研究生招生考试初试试题(B卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码：872 总分值：150 科目名称：量子力学

一、简答题（每小题6分共30分）

1. 将波函数$\psi = A\exp(-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2)$归一化。

2. 力学量$\hat{G}$在其自身表象下的矩阵一定是对角矩阵吗？举一个例。

3. 若表征角动量$\vec{J}_1$的量子数为j_1，表征角动量$\vec{J}_2$的量子数为j_2求两个角动量之和的量子数的取值。

4. 写一个量子相干叠加态，写一个量子纠缠态（都可以用ket-bra表示）。

5. 若$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$，则$[x, \hat{p}_x] = i\hbar$？请证明之。

二．计算题（共120分）

1. （15分）氢原子处于基态 $\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$，计算 $\Delta x \Delta p_x$，并检验测不准关系。

2. （20分）设氢原子处于状态

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2}R_{21}(r)Y_{10}(\theta,\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r)Y_{1-1}(\theta,\varphi)$$

求氢原子能量、角动量平方及角动量Z分量的可能值，这些可能值出现的几率和这些力学量的平均值。提示：氢原子的能级为$E_2 = -\frac{\mu e_s^2}{2\hbar^2 n^2} = -\frac{\mu e_s^2}{8\hbar^2}$。

3. （20分）求$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$与$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$在$\sigma_z$表象中的本征值与对应的本征矢。

4. （15分）自旋s=1/2，并且具有自旋磁矩$\hat{M} = \mu_0\hat{S}$的粒子处于沿x方向的均匀磁场$\vec{B}$中，已知t=0时刻粒子的$s_z = \hbar/2$，求在以后任意时刻t发现粒子具有$s_y = \pm\hbar/2$的几率。

5. （15分）求在一维短程势$V(x) = -V_0\delta(x)$中质量为m的粒子的束缚能。