目 录

上海交通大学 1-1

一九九七年硕士研究生入学考试试题

试题名称 ______ 试题编号 50

须写在答题纸上 量子力学

(a) 若 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ 均为厄米算符，试证明在任意状态 ψ 下，平均值 $\langle\psi|\hat{A}^2+\hat{B}^2+\hat{C}^2|\psi\rangle\geq 0$.

(b) 一维情况下哈密顿算符 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V(x)$，试求对易关系 $[\hat{H},\hat{p}^2]=?$

(c) 在状态 $\psi=(x^2-y^2)f(x^2+y^2+z^2)$ 之下，测量 $\hat{L}_z$ 的可能值和平均值是什么？ (15分)

(a) 为什么波函数一般应为粒子坐标和时间的复函数，而不是实函数？

(b) 一体系的哈密顿 $\hat{H}$ 中含参数 λ，ψ 为 $\hat{H}(\lambda)$ 的归一化本征函数，相应的本征值为E，证明

$$\frac{\partial E}{\partial\lambda}=\langle\psi|\frac{\partial\hat{H}(\lambda)}{\partial\lambda}|\psi\rangle \qquad (15分)$$

3、利用量子力学中熟知的结果解下列问题

(a) 求恒定电场 $\mathcal{E}$ 中，电荷为e的一维线性谐振子的能级和相应的波函数.

(b) 一质量为 μ 的粒子在一维势

$$V(x)=\begin{cases}+\infty & x\le 0\\ \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2 & x>0\end{cases}$$

中运动，求其能级． (20分)

(a) 对泡利矩阵证明 (15分)

$$e^{i\sigma_y\varphi}=\cos\varphi+i\sigma_y\sin\varphi$$

(b) 若在某表象中矩阵 $A=\sigma_x\sin\varphi+\sigma_y\cos\varphi$，现用 $S=e^{-i\sigma_z\varphi/2}$ 变换到新表象，求新表象中的矩阵 A'。

. 一维粒子的 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2\mu}-Fx$，$F$为常数，试在动量表象中求其波函数。 (10分)

. $t=0$ 时，平面转子的波函数为 $\psi(\varphi,0)=A\sin^2\varphi$，求以后任意时刻的波函数 $\psi(\varphi,t)$．$\psi(\varphi,0)$ 中 A为常数． (15分)

. (a) 为什么氢分子由二个氢原子组成，而不能由三个氢原子组成？

(b) 什么是正氢？什么是仲氢？

请简要回答之． (10分)

上海交通大学

一九九八年硕士研究生入学考试试题

试题名称 量子力学 试题编号 50

答案必须写在答题纸上

1. a) 为什么波函数一般为粒子的坐标和时间的复函数，而不是实函数？

   b) 试述波函数归一化条件的意义。 (10分)

2. a) 计算 $[\hat{x}, e^{\alpha \hat{p}_x}] = ?$，其中 α 为常数。

   b) 若 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 为满足 $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ 的二算符，求 $[A^2, B^2] = ?$ (10分)

3. a) $\hat{A}$，$\hat{B}$ 和 $\hat{C}$ 均为厄米算符，证明任意状态 $|\psi\rangle$ 下，平均值 $\langle\psi| \hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{C}^2 |\psi\rangle \geq 0$

   b) 求粒子在 $\psi = c(\cos^2 kx - \sin^2 kx)$ 的状态下（其中 c 为常数），测量粒子动量的可能值和平均值。 (15分)

4. 简要叙述你对量子力学中能量简并问题的认识。 (15分)

5. 利用熟知结果求解下列问题

   若粒子在 yz 平面的矩形范围 $0 \leq y \leq a$，$0 \leq z \leq b$ 中自由运动，但不能到达 yz 平面的其余部份；同时粒子在

OX方向上受到力 $f=-kx$（k为常数）的作用。求此粒子的能级和相应的波函数。（20分

6. 角动量为1的粒子所处的状态由态矢量

$$\chi=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$$

描写，而

$$\hat{L}_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

求 χ 态下测量 $\hat{L}_x$ 得到测量值为零的几率.（15分

7. 若三个质量均为 μ 的粒子被限制在半径为 r 的圆周上运动，三者之间的距离固定，并构成一个等边三角形。在不计自旋的条件下，试求此系统的转动能量.（15分

上海交通大学
一九九九年硕士生入学考试试题

试题序号 50 （答案请写在答题纸上）

试题名称 量子力学

1-1

1. a) 计算对易关系 $[\hat{x}, f(x)\hat{p}_x^2]$. （15分）

b) 称符 $\hat{L}$ 和 $\hat{M}$ 满足 $\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}=1$，求 $[\hat{L},\hat{M}^2]$.

2. 求在状态 $\psi=(x^2-y^2)f(x^2+y^2+z^2)$ 下，测量 $\hat{L}_z$ 的可能值和平均值. （10分）

3. 若粒子的哈密顿 $\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}-f\hat{x}$，$f$ 为常数，试在动量表象中求此一维粒子的波函数. （10分）

4、利用熟知的结果求解下列问题 （20分）

a) 求在恒定电场 E 中，电荷为 e 的一维线性谐振子的能级和波函数.

b) 粒子在 yz 平面的矩形范围 $0\le y\le a$，$0\le z\le b$ 中自由运动，但不能到达 yz 平面的其余部分。同时粒子在 ox 方向受到力 $F=-kx$（k 为常数）的作用，求此粒子的能级和相应的波函数.

5. 在无限深势阱 （15分）

$$U(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le a\\ \infty & x>a,\ x<0\end{cases}$$

之上，加微扰 $\hat{H}'=w_0\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$（$w_0$ 为常数）时，

求第n个能级的一级能量修正.

6. 角动量为1的粒子所处的状态的态矢量为 (15分)

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

而 $$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

试求在χ状态下测量$\hat{L}_x$得到测量值为0的几率.

7. 设$t=0$时刻,平面转子的波函数为$\psi(\varphi,0)=A\sin^2\varphi$,求任意时刻$t$时的波函数$\psi(\varphi,t)$.($t=0$时的波函数$\psi(\varphi,0)$中的$A$为常数). (15分)

上海交通大学

2000年硕士生入学考试试题

1—1

试题序号 50

试题名称 量子力学

（答案必须写在答题纸上，否则答题无效）

1. 写出 (i) $\hat{x}$，(ii) $\hat{p}$，(iii) $\hat{L}^2$，$\hat{L}_z$ 的归一化本征函数及本征值。（10分）

2. $f(\theta\phi)=Y_{30}(\theta\phi)+2Y_{22}(\theta\phi)+2Y_{11}(\theta\phi)$，问

(i) $f(\theta\phi)$ 是否為 $\hat{L}^2$ 或 $\hat{L}_z$ 之本征函数？

(ii) 测 $\hat{L}^2$ 的可能值，平均值為多少？

(iii) 测 $\hat{L}_z$ 的可能值，平均值為多少？（15分）

3. 哈密顿量 $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)+\xi(r)\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}$，写出一组完全集合力学量。（10分）

4. 写出二个电子耦合后的自旋本征态和本征值。（10分）

5. 角动量為1的粒子处在状态 $\psi=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，而 $\hat{L}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$。

求在 ψ 状态下，测量 $\hat{L}_x$ 得到测量值為0的几率。（10分）

6. 求 $\hat{H}=\frac{1}{2m}\hat{p}_x^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\alpha x$ 能量之本征值。 (10分)

7. 氢原子中能有下列量子数的最大电子数是多少：

(i) n, l, m (ii) n, l (iii) n . (10分)

8. 一维谐振子 $\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

(i) 写出在 x 表象的本征方程，

(ii) 写出海森堡运动方程及其形式解。 (10分)

9. 电子在均匀磁场中运动（不考虑轨道运动），其哈密顿量为

$$\hat{H}=\frac{eB}{mc}\hat{S}_z=\frac{eB\hbar}{2mc}\hat{\sigma}_z,$$

$t=0$ 时处在 $\hat{S}_x$ 为 $\frac{\hbar}{2}$ 之本征态，求在 t 时刻 $\hat{\vec{\sigma}}$ 之平均值。

(15分)

上海交通大学

2001年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 427　试题名称: 量子力学

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. (15) 一质量为μ的粒子处于一维δ函数势中, $V(x) = -V_0\delta(x)$, 其中$V_0 > 0$, 求其束缚态的本征值和本征函数.

2. (15) 一维单粒子系统的哈密顿量算符为$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(x)$, 证明$[[\hat{H}, x], x] = -\frac{\hbar^2}{\mu}$, 并进而证明$\sum_n (E_n - E_0)|\langle 0|x|n\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}$. 其中$\langle 0|x|n\rangle \equiv \int \psi_0^* x \psi_n dx$, ψ_n和E_n分别为$\hat{H}$的本征函数和对应的本征值.

3. (15) 从维里定理$\langle 2\hat{T}\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V(r)\rangle$ 出发, 求氢原子处于态ψ_{nlm}时的动能和势能平均值.(已知处于ψ_{nlm}态的氢原子的能量为$E_n = -\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}$, a_0 为玻尔半径).

4. (20) 电子处于一维谐振子势$\frac{1}{2}\mu\omega_0^2x^2$中.

   (a) 若电子处于基态时位置的涨落为
   $$\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle = 10^{-16}\mathrm{cm}^2,$$
   试由此求出ω_0 的数值(电子质量$\mu = 9.1 \times 10^{-31}kg$, 谐振子的基态波函数为$\psi_0 = \left(\frac{\mu\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\mu\omega_0}{2\hbar}x^2\right)$).

   (b) 若对此系统外加一x方向的电场E, 试计算能级的变化.

5. (20) 考虑电子自旋在均匀磁场中的进动. 设磁场为$(0, 0, B)$, 则自旋运动的哈密顿量为$H = \frac{e\hbar}{mc}\sigma \cdot B = \frac{e\hbar}{mc}\sigma_3 B$.

   (a) 若$\Psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 试求$\Psi(t)$及$t$时刻测得自旋$S_3$为$\hbar/2$的几率.

   (b) 若在x方向再加磁场B_1, 请写出自旋运动的哈密顿量并计算该哈密顿量的本征值和本征函数.

6. (15分). 由两个电子组成的复合系统, 其总自旋为1, 总自旋第三分量为0. 写出自旋波函数, 计算测得总自旋第二分量平方的平均值.

上海交通大学

2002年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 427　试题名称: 量子力学

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

1. 设 A, B 为厄米算符，问(i) AB+BA, (ii) i[A, B]是否为厄米算符？试证明。(10 分)

2. 波函数 $f(\theta,\phi)=Y_{31}(\theta,\phi)+2Y_{21}(\theta,\phi)+2Y_{11}(\theta,\phi)$，(i) 问 $f(\theta,\phi)$ 是否为 L^2, L_z 本征函数。(ii)测 L^2, L_z 得到什么值？对应几率？平均值？(15 分)

3. σ_z 表象的自旋波函数为 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，问测得 σ_x 为 ± 1 的几率为多少？(15 分)

4. 转动惯量为 I 的平面转子哈密顿量 $H=\frac{L_z^2}{2I}$。设时间 $t=0$ 时 $\psi(\phi,0)=ASin^2\phi$，求 $\psi(\phi,t)$。(15 分)

5. 二维谐振子哈密顿量为 $H=\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2)+\frac{m}{2}(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2)$。讨论(i)当 $\omega_x=\omega_y=\omega$ 时，能级的本征值和简并度。(ii) 当 $\omega_x=\frac{1}{2}\omega_y=\omega$ 时，最低 4 个能级的本征值和简并度。(15 分)

6. 写出(i)三维自由粒子和(ii)三维有心力场中粒子的运动积分(守恒量)。(15 分)

7. 电子在磁场中的哈密顿量为 $H=\frac{eB}{mc}S_x$，设时间 $t=0$ 时电子处在自旋 $S_z=\frac{\hbar}{2}$ 的本征态，求 $t>0$ 时 $\vec{S}$ 的平均值。（15 分）

上海交通大学

2004年硕士研究生入学考试试题

试题序号:428 试题名称: 电磁学和量子力学

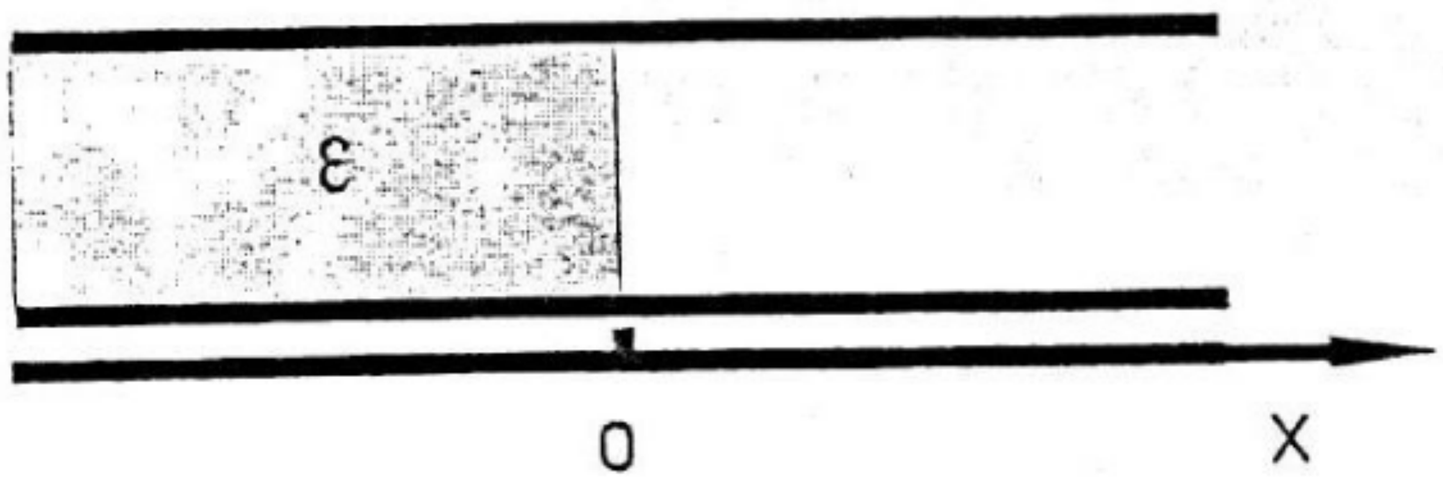
（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

电磁学部分：（七题选作六题，不要多选，多选以得分最少的六题计分，每题 15 分.）

1. 把一个带电物体从外面接近一个导体壳，带电体单独在导体空腔内产生的电场是否为 0？静电屏蔽效应是怎样体现的？

2. 在空间有相互平行的均匀电场 $\vec{E}$ 和均匀磁场 $\vec{B}$，沿 z 方向，一带电粒子（质量为 m, 电荷为 q）开始时以速度 $\vec{v}$ 沿 y 方向前进。讨论带电粒子的轨迹。

3. 如图所示，两很大的方形平板构成一个平板电容器，电容器的一半(x<0)充满介电常数为 ε 的电介质，板间加电压 V, 求电容器内的电场强度的分布和板上的电荷



4. 一导体球半径为 R, 带电 q, 计算这个导体球的静电能.

5. 太阳每分钟垂直射于地面每平方厘米的能量约为 8 焦耳，求地面上日光中电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 的方均根值.

6. 试推导两种电介质交界面上电场强度和电位移矢量的边界条件.

7. 设两平行导线间的垂直距离为 a, 其中的稳恒电流分别为 I_1 和 I_2，试计算单位长度导线上的相互作用力的大小和方向.

量子力学部分：（五题题选作四题，不要多选，多选以得分最少的四题计分，每题15分.）

1．考虑由波函数$\psi(\vec{r},t)$描述的粒子，证明粒子的概率密度满足连续性方程

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t)=0$$

其中：$\rho(\vec{r},t)=\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$，$\vec{J}(\vec{r},t)=\frac{1}{m}\mathrm{Re}\left(\psi^*(\vec{r},t)\frac{\hbar}{i}\nabla\psi^*(\vec{r},t)\right)$

为粒子的概率密度和概率流密度.

2．利用 Born 近似计算高斯势

$$V(r)=\frac{V_0}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

的微分截面.

(提示：$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{a^2}}\sin(br)rdr=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^3be^{-a^2b^2/4}$)

3．求自旋角动量（自旋为$\frac{1}{2}\hbar$）在任意方向$\vec{n}$（方向余弦是$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$）的投影

$$S_n=S_x\cos\alpha+S_y\cos\beta+S_z\cos\gamma$$

的本征值和本征函数.

4．一个系统的哈密顿量为$H=H_0+H_1$，其中

$$H_0=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{bmatrix},\qquad H_1=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$$

(1). 用微扰论计算能量至二级修正值.

(2). 求出能量本征值的精确解并与微扰论的计算结果比较.

5. 设粒子在势阱宽度为 a 的一维无限深势阱中运动，如果粒子的状态由波函数

$$\psi(x)=\frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}$$

描述，求粒子的能量的可能值和相应的概率.

上海交通大学

2005年硕士研究生入学考试试题

试题序号: 428 试题名称: 电磁学和量子力学

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

电磁学部分(总分90分)

一, (15分) 证明导体表面上任意一点单位面积上所受的静电力为

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}.$$

其中σ是该点的面电荷密度, $\vec{n}$是该点的外法线方向.

二, (20分) 一平行板电容器的面积为S, 相距为d, 其间充满电介质, 介质的相对介电常数(电容率)在极板1处为ε_1, 在极板2处为ε_2, 从极板1到极板2随距离极板1做线性变化. (1), 计算这个电容器的电容, 并给出当$\varepsilon_2 = \varepsilon_1$时的结果; (2), 当极板带电为$Q$时, 计算介质中的电荷分布. (忽略边缘效应)

三, (20分) 一个无限长的直圆柱导体, 内有一无限长的直圆柱空洞, 空洞的轴线与圆柱体的轴线平行但不重合,相距为d. 如果有电流密度为$\vec{j}$的均匀电流沿导体的轴线方向流动, 计算空洞内的磁感应强度.

四, (15分) 对于如图所示的电路, 开关在1处达到稳态后, 很快拨向2, 试分析电路中电流随时间的变化关系. 设电阻为R, 电感为L, 电源的电动势为$\mathcal{E}$, 忽略电源的内阻.

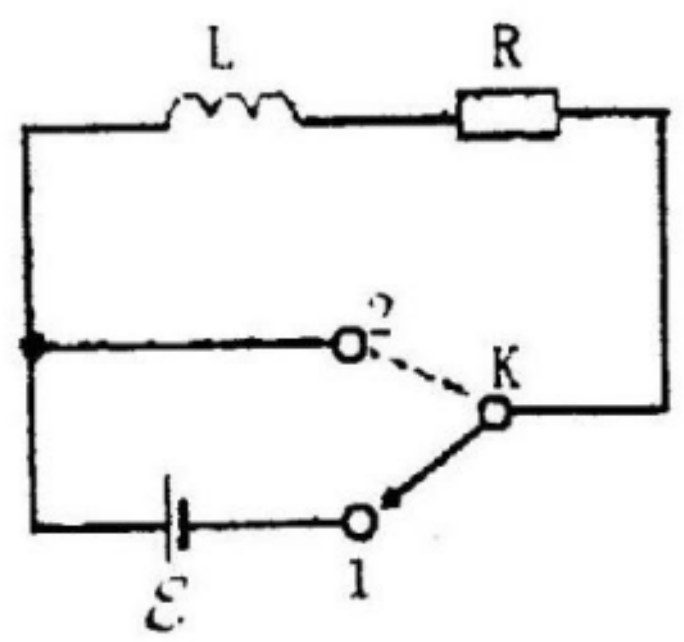


图 1: 题四图

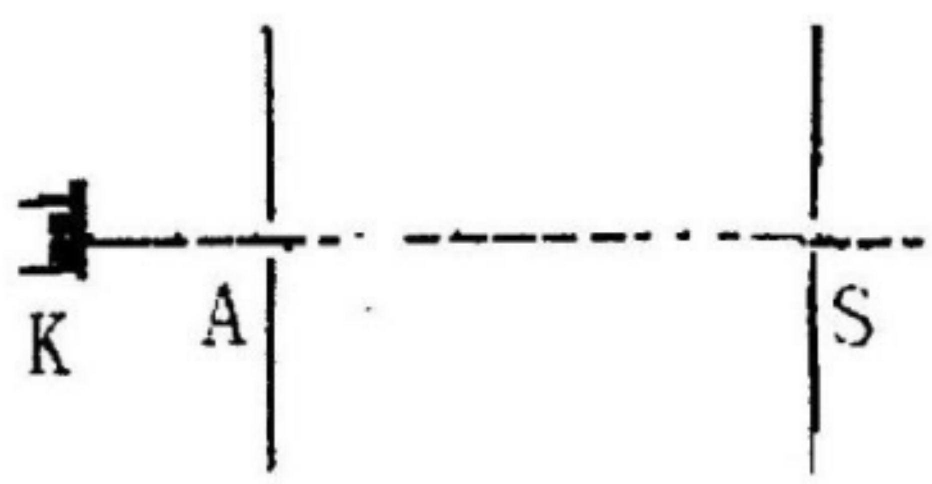


图 2: 题五图

五, (10分) 如图, K为一电子枪, 沿KA方向射出的电子速率大小不同. 为了挑选出速度相同的电子, 可以在电子经过的路上加上电场和磁场, 并在S处放一阻隔屏, 在电子前进的方向上开一小孔. 为了使得从小空出来的电子的速度为v, 应如何加电场和磁场? 给出相应的公式和说明.

六, (10分) 计算均匀带电球体的静电能. 设球半径为R, 带电量q.

量子力学部分(总分60分):

一, (10分) 利用不确定关系估算氢原子的基态能量.

二, (20分) 试证明一维有限方势阱至少存在一个束缚态.

三, (20分) 求出两个电子(自旋为1/2)的总自旋角动量和总自旋角动量第三分量的本征值和本征函数.

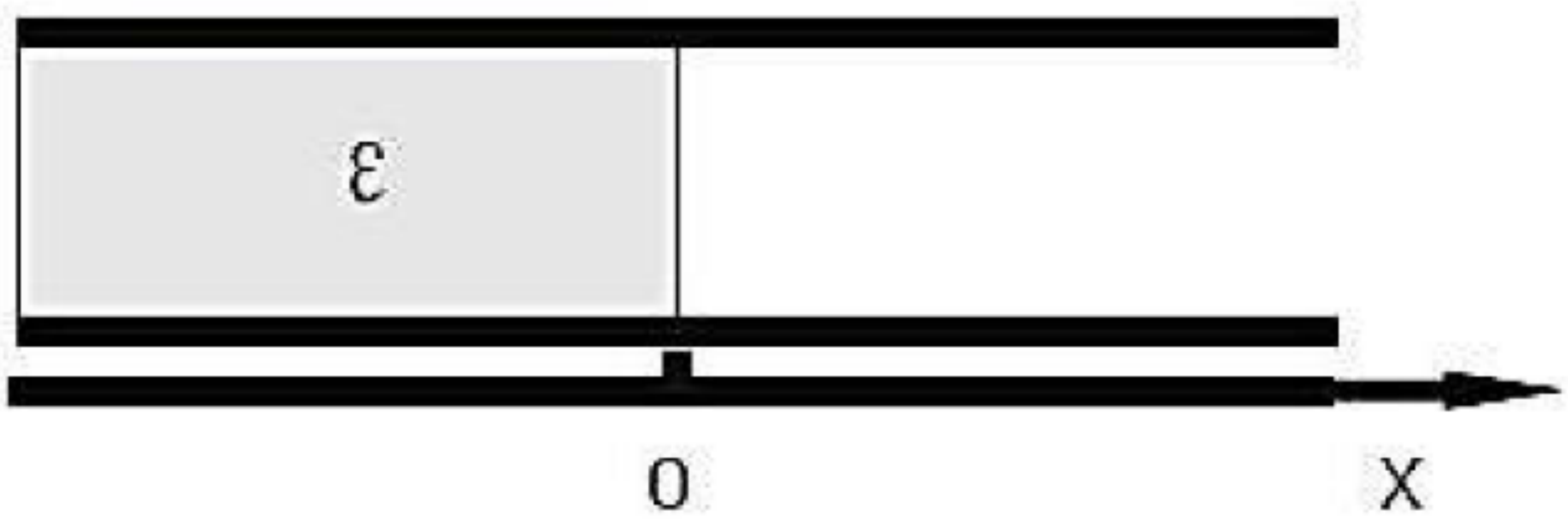
四, (10分) 证明: 在角动量z分量$\hat{l}_z$的本征态上, $\hat{l}_x$和$\hat{l}_y$平均值为0. [提示: 利用角动量的对易关系]

电磁学部分：（七题选作六题，不要多选，多选以得分最少的六题计分，每题 15 分.）

1. 把一个带电物体从外面接近一个导体壳，带电体单独在导体空腔内产生的电场是否为 0？静电屏蔽效应是怎样体现的？

2. 在空间有相互平行的均匀电场 $\vec{E}$ 和均匀磁场 $\vec{B}$，沿 z 方向，一带电粒子（质量为 m，电荷为 q）开始时以速度 $\vec{v}$ 沿 y 方向前进。讨论带电粒子的轨迹。

3. 如图所示，两很大的方形平板构成一个平板电容器，电容器的一半(x<0)充满介电常数为 ε 的电介质，板间加电压 V，求电容器内的电场强度的分布和板上的电荷.



4. 一导体球半径为 R，带电 q，计算这个导体球的静电能.

5. 太阳每分钟垂直射于地面每平方厘米的能量约为 8 焦耳，求地面上日光中电场强度 $\vec{E}$ 和磁感应强度 $\vec{B}$ 的方均根值.

6. 试推导两种电介质交界面上电场强度和电位移矢量的边界条件.

7. 设两平行导线间的垂直距离为 a，其中的稳恒电流分别为 I_1 和 I_2，试计算单位长度导线上的相互作用力的大小和方向.

量子力学部分：（五题题选作四题，不要多选，多选以得分最少的四题计分，每题15分.）

1．考虑由波函数$\psi(\vec{r},t)$描述的粒子，证明粒子的概率密度满足连续性方程

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t)=0$$

其中：$\rho(\vec{r},t)=\psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$，$\vec{J}(\vec{r},t)=\frac{1}{m}\mathrm{Re}\left(\psi^*(\vec{r},t)\frac{\hbar}{i}\nabla\psi^*(\vec{r},t)\right)$

为粒子的概率密度和概率流密度.

2．利用 Born 近似计算高斯势

$$V(r)=\frac{V_0}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

的微分截面.

(提示：$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{a^2}}\sin(br)rdr=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}a^3be^{-a^2b^2/4}$)

3．求自旋角动量（自旋为$\frac{1}{2}\hbar$）在任意方向$\vec{n}$（方向余弦是$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$）的投影

$$S_n=S_x\cos\alpha+S_y\cos\beta+S_z\cos\gamma$$

的本征值和本征函数.

4．一个系统的哈密顿量为$H=H_0+H_1$，其中

$$H_0=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{bmatrix},\qquad H_1=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$$

(1). 用微扰论计算能量至二级修正值.

(2). 求出能量本征值的精确解并与微扰论的计算结果比较.

5. 设粒子在势阱宽度为 a 的一维无限深势阱中运动，如果粒子的状态由波函数

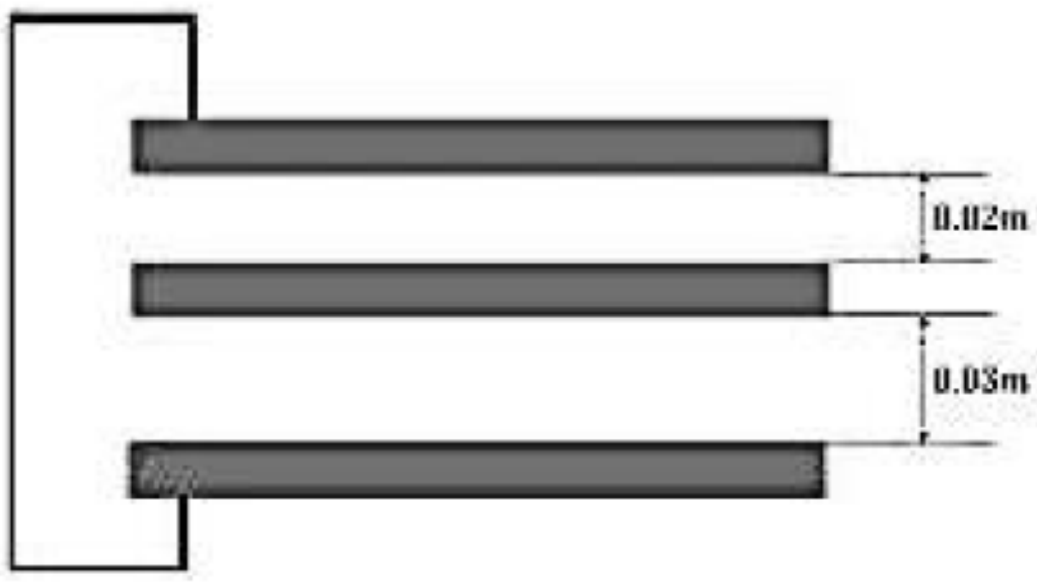
$$\psi(x)=\frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}$$

描述，求粒子的能量的可能值和相应的概率.

一、电磁学部分(总分90分，每题15分)

1, 推导两种电介质交界面上电场强度和电位移矢量的边界条件.

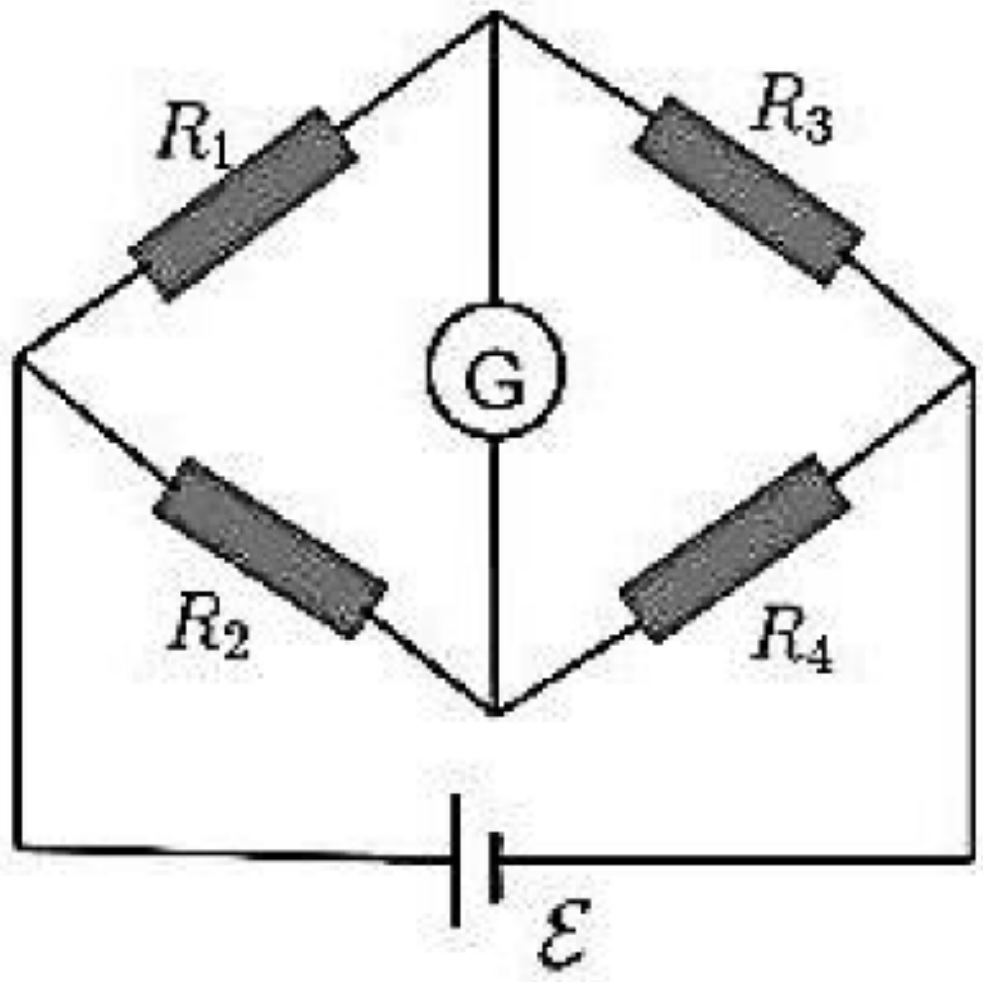
2, 如图所示，有三块相互平行的导体版，外边两块用导线连接，中间一块与另外两块绝缘，带有电荷, 电荷密度为$10^{-4}C/m^2$, 电荷将分布于上下两个表面，请求出中间导体版上下表面的电荷密度。



3, 二螺线管同轴，半径分别为R_1, R_2, $(R_1 > R_2)$, 长度为$l(l \gg R_1)$, 匝数分别为N_1和N_2. 求互感系数M_{12}和M_{21}.

4, 从比奥-萨伐尔定律出发，对于多根载流直导线，证明安培环路定理：磁感应强度$\vec{B}$沿任意闭合回路的线积分(环流)等于穿过这个环路的所有电流强度的代数和I的μ_0倍。

5，求如图惠斯登电桥中电流计的电流与电源电动势及各臂电阻的关系. 讨论电桥的平衡条件.



6，一半径为R的金属球接地, 在距离球心$d = 2R$处有一点电荷$q(q > 0)$. 求球上的感应电荷q'.

二，量子力学部分(总分60分，每题15分)

7, 自旋角动量（自旋为$\frac{1}{2}\hbar$）在方向$\vec{n}$（方向余弦是$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$）的投影为:

$$S_n = S_x\cos\alpha + S_y\cos\beta + S_z\cos\gamma.$$

若自旋处于$\vec{n}$方向的本征态，本征值为$\frac{1}{2}\hbar$. 测量S_z将得到那些值，各自的概率是多少。

8，粒子在势场

$$V(x) = C|x|, \qquad C > 0$$

中运动，试用变分法求基态能级的近似值，并和精确值比较. (试探波函数可以取为

$$\psi(\lambda, x) = Ne^{-\frac{1}{2}\lambda^2x^2}.$$

或其它合适的函数. 基态能量的精确值为$E = 0.80862\left(\frac{\hbar^2C^2}{m}\right)^{1/3}$)

9，设粒子在势阱宽度为a的一维无限深势阱

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, x > a \\ 0, & 0 < x < a \end{cases}$$

中运动, 如果粒子的状态由波函数

$$\psi(x) = \frac{4}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}$$

描述, 求粒子能量的可能值和相应的概率.

2008 年上海交通大学电磁学和量子力学考研真题

一. 电磁学部分(总分90分，每题15分)

1, 由点电荷的电场强度的公式和叠加原理证明高斯定理:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}$$

方程左边的积分沿一闭曲面进行, q_{in}是该闭曲面内的所有电荷的代数和.

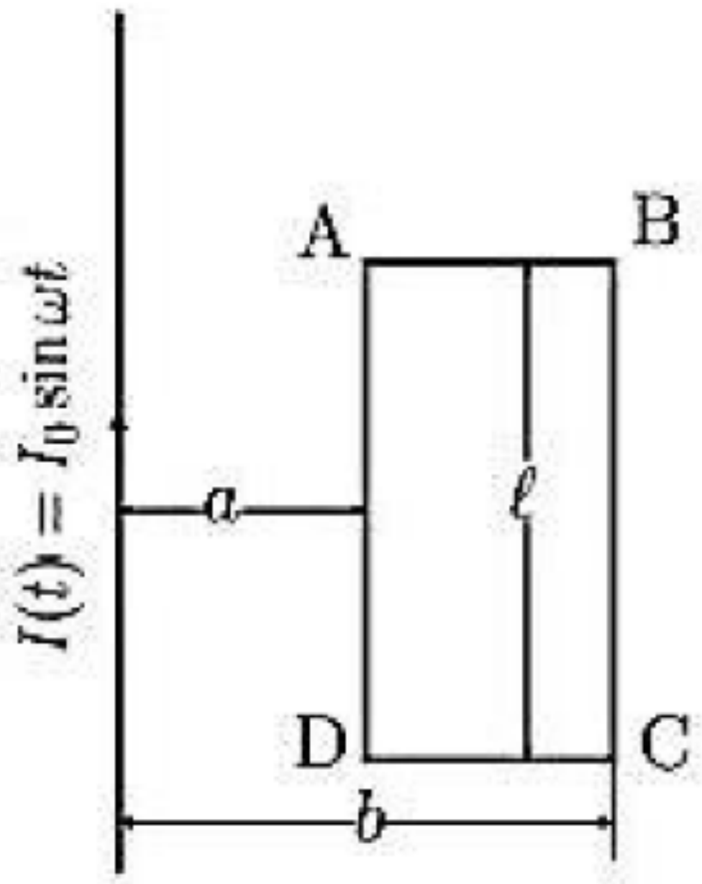
2, 请描述一个测量半导体载流子浓度和载流子类型(电荷符号)的常用方法, 给出测量原理和相关公式的推导.

3, a), 计算一个无限长载流螺线管内的磁感应强度(电流强度为I，单位长度绕n圈). b), 计算两相距为d的平行载流导线之间的相互作用力，设电流密度分别为I_1和I_2. 若$I_1 = I_2 = I$, $d = 1m$, 导线1单位长度受到的力的大小为$f = 2 \times 10^{-7} N/m$, 请问$I =$?.

4, 如图，一载流直导线通有交流电流

$$I = I_0 \sin(\omega t)$$

其中I_0 和ω 是常量，计算导线框ABCD中的感应电动势。



5, 半径为a的导体圆柱外面套有一半径为b的同轴导体圆筒，长度均为L, 其间充满介电常数为ε 的均匀电介质，忽略边缘效应。(1). 若圆柱带电Q, 圆筒带电$-Q$, 整个介质内的电场能量是多少？(2), 若圆柱和圆筒间加上恒定电压V, 整个介质内的电场能量是多少？(3), 分别在上述两种条件下把介质抽走，外力对介质需要做多少功？

6，一半径为a,长为L的均匀导体的电阻为R。现把此导体接入一回路，回路的电流强度为I。忽略边缘效应。(1),计算导体外围靠近导体处的电场强度和磁感应强度。(2),导体消耗的功率是多少, 这些消耗掉的能量是如何从电源传入导体的？

二，量子力学部分，选作三题，每题20 分，总分60分(不要多选,多选将以得分最少的三题记分)

7，质量为m 的粒子以给定能量$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ 自$x<0$区域向x正向入射，遇到势垒，

$$V(x)=\begin{cases}0, & x<0, x>a\\ V_0, & 0\le x\le a\end{cases}$$

求粒子的透射系数和反射系数。分别就(1), $m=1g$, $V_0-E=10^{-9}J$, $a=1cm$; 和(2), $m=m_e$(电子质量), $V_0-E=0.5eV$, $a=0.05nm$ 讨论所得结果。

8，考虑三个自旋为$\frac{1}{2}$的可分辨粒子构成的系统。(1)，求总自旋角动量平方$\vec{S}^2=(\vec{S}_1+\vec{S}_2+\vec{S}_3)^2$的本征值; (2), 设体系的哈密顿为

$$H=\frac{\omega}{\hbar}(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2+\vec{S}_2\cdot\vec{S}_3+\vec{S}_3\cdot\vec{S}_1)$$

求系统的能级和各能级的简并度。

9，一维谐振子，初始波函数为

$$\psi(x,0)=\frac{1}{2}\psi_0(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x)$$

求$\psi(x,t)$ 以及t 时刻能量，坐标和动量的平均值。(下述关系也许有用：对于简谐振子，

$$x\psi_n=\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(\sqrt{n}\psi_{n-1}+\sqrt{n+1}\psi_{n+1}\right)$$
$$\frac{d}{dx}\psi_n=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}\psi_{n-1}-\sqrt{n+1}\psi_{n+1}\right)$$

其中，$\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$)

10，设电子和电子的散射振幅为$f(\theta)$. 电子的自旋为$\frac{1}{2}\hbar$, 当两个电子散射时，考虑电子的全同性，并假定入射电子束和靶电子均未极化. 求出用散射振幅表示的微分散射截面的公式。

2011 年上海交通大学 829 电磁学和量子力学考研真题（回忆版）

一、电磁学部分

1．用麦克斯韦方程证明电磁波运动方程。

2．计算两个电偶极子之间相互作用力，已知条件是告诉你两个电偶极子的位置和电偶极矩吧。

3．两个极板之间用导线连了一个电阻，已知条件是上极板电荷＋Q，下极板-Q，极板是半径为 R 的圆盘，（1）计算 t 时间上下极板电荷与时间的关系；（2）计算半径为 r 的电流与时间的关系；第三问记不得了，谁记得补充下。

4．一个无限长导线弯成互相垂直两端，空间有一个点电荷，计算空间任一点电势。

5．氢原子，在考虑经典辐射条件下计算能量变化的偏微分方程，并计算电子从半径 R 落到波尔半径所需要的时间。

6．记不得了。

二、量子力学部分

7．A，B 为任意对易的算符，证明（p.A）（P.B）＝（A.B）＋i（后面啥的忘了，p 代表泡利算符，陈鄂生那本习题上好像有）

8．A，B 不对易，证明不确定关系。

9．A，H 不对易，给出 A，和 H 的本征值和本征函数，并告诉 t 等于 0 时刻所处的态，计算 t 时刻 A 的平均值。

10．粒子在半径为 a 的圆周上运动，围绕为 Acos（θ）sin（θ），$E=\hbar^2/2*ma^2$。计算波函数和能量一级近似。

上海交通大学

2012 年硕士研究生入学考试试题

试题序号：829 试题名称：电磁学和量子力学

考试时间： 3 小时 满分值： 150 分

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

电磁学部分:（每题 15 分，共计 90 分）

一，半径为 R 的圆盘均匀带电，面电荷密度为 σ（单位面积上的电量），P 为轴线上一点，离圆心 O 的距离为 x，求 P 点的场强。

二，证明导体表面上任意一点单位面积上所受的静电力为

$$\overline{f}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

其中 σ 是该点的面电荷密度，$\vec{n}$ 是该点的外法线方向。

三，设氢原子在基态时，电子电荷（设总电子电量为 $-e$）均匀地分布在半径为 a 的球内，核电荷集中于球心，求出该原子的总电场与电位分布，并画出示意图。

四，试推导两种电介质交界面上电场强度和电位移矢量的边界条件。

五，真空中用两根彼此平行的半无限长直导线 L_1，L_2 把半径为 R 的均匀导体圆环连到电源上。已知直导线上的电流为 I，求圆环中心 O 点的磁感应强度。

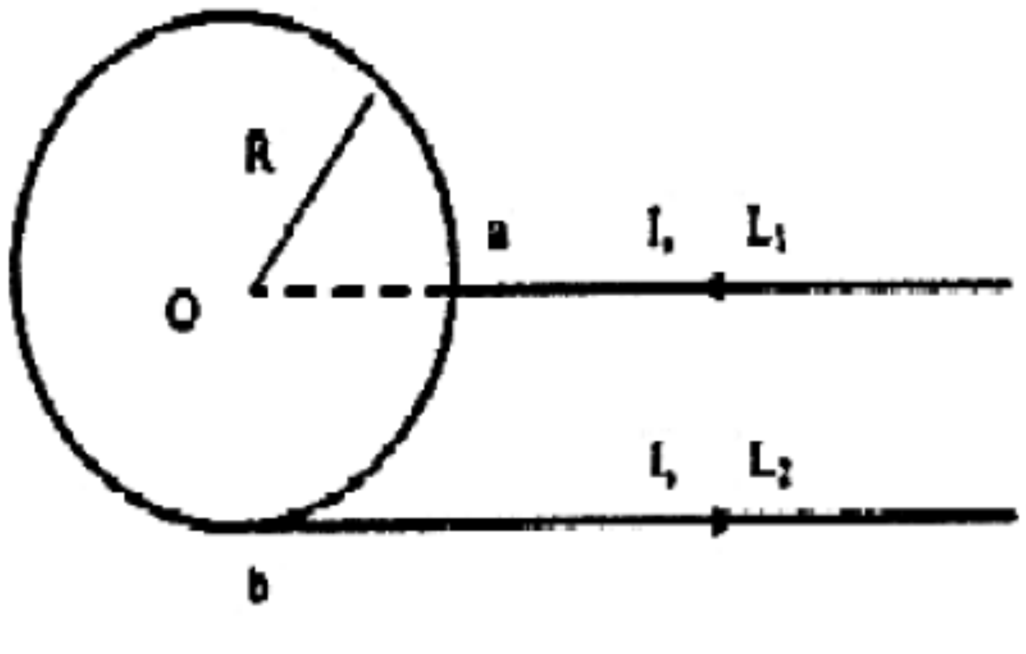


图 1：题五图

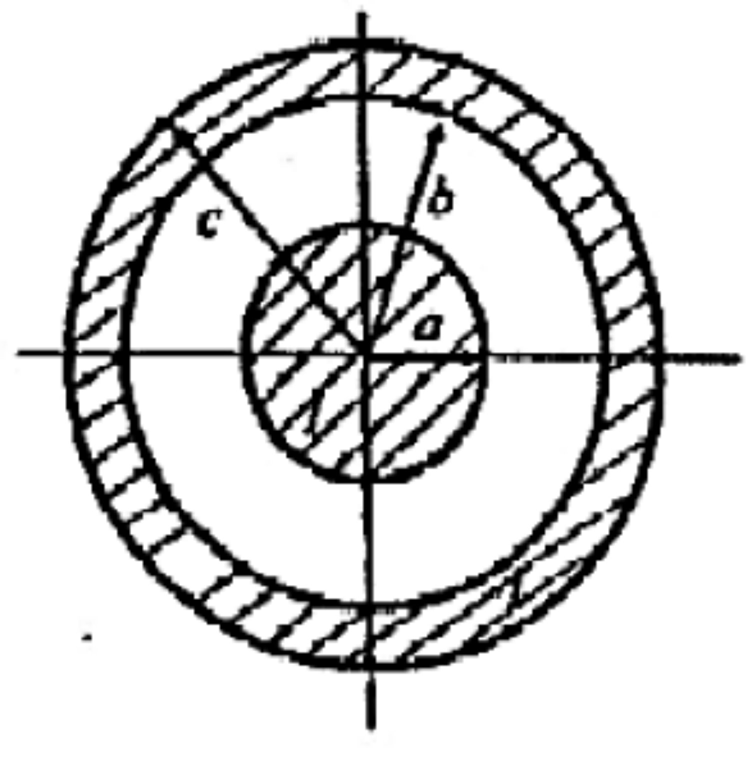


图 2：题六图

六，一无限长同轴线内、外导体的半径分别为 a、b 和 c，上面流有均匀反向直流 I 和 $-I$，内外导体的电位差 U_0，导体间为真空。试求：

（1）$a<r<b$ 区域的 $\overline{E}$ 和 $\overline{H}$；（2）$r=b$ 的电荷面密度 ρ_s；（3）单位长度的外自感。

量子力学部分（总分60分）

一、（15分）求一维无限深势阱中的粒子处于第一激发态时概率最大值的位置。

二、（15分）在动量表象内，求坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}_x$ 的本征矢的表达式。

三、（20分）体系未受微扰作用时只有两个能级：E_{01} 和 E_{02}，现在受到微扰 $\hat{H}'$ 的作用，微扰矩阵元为 $H'_{12}=a$，$H'_{21}=b$，$H'_{11}=c$，$H'_{22}=d$，a,b,c,d 均为实数。假设满足非简并条件，求能级至二级修正值。

四、（10分）写出氢原子处于 $3p$ 态的电子径向 *Schrödinger* 方程，并给出该态下哈密顿算符 $\hat{H}$ 和角动量平方算符 $\hat{L}^2$ 的本征值。

上海交通大学

2013 年硕士研究生入学考试试题

试题序号： 829 试题名称： 电磁学和量子力学

考试时间： 3 小时 满分值： 150 分

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

电磁学部分（总分 90 分）

一，（10 分）请写出麦克斯韦方程组的积分形式，并说明每个方程的物理意义。

二，（10 分）一平板空气电容器的极板面积为 S，间距为 d。电源充电后两极板上带电量分别为 $\pm Q$。断开电源后再把两极板间的距离拉开至 $2d$。求外力克服两极板相互吸引力所做的功。

三，（15 分）在空间有相互平行的均匀电场 $\vec{E}$ 和均匀磁场 $\vec{B}$，沿 x 方向，一带电粒子（质量为 m，电荷为 q）开始时以速度 $\vec{v}$ 沿 y 方向前进。讨论带电粒子的轨迹。

四，（20 分）一个半径为 R 的塑料圆盘（忽略圆盘的厚度），有总电量 Q 的电荷均匀分布在圆盘表面上，如果这个圆盘以等角速度 ω 绕中心垂直轴转动，试求（1）圆盘中心的磁感强度；（2）圆盘的磁偶极矩。

五，（20 分）如图所示，开关 K 先接 1 对电容器充电到稳定值，将 K 拨向 2。

（1）问经几倍 τ 的时间后，电容器所存储的能量减为原来的一半；

（2）证明电容器所存储的能量完全转化为电阻上消耗的焦耳热。

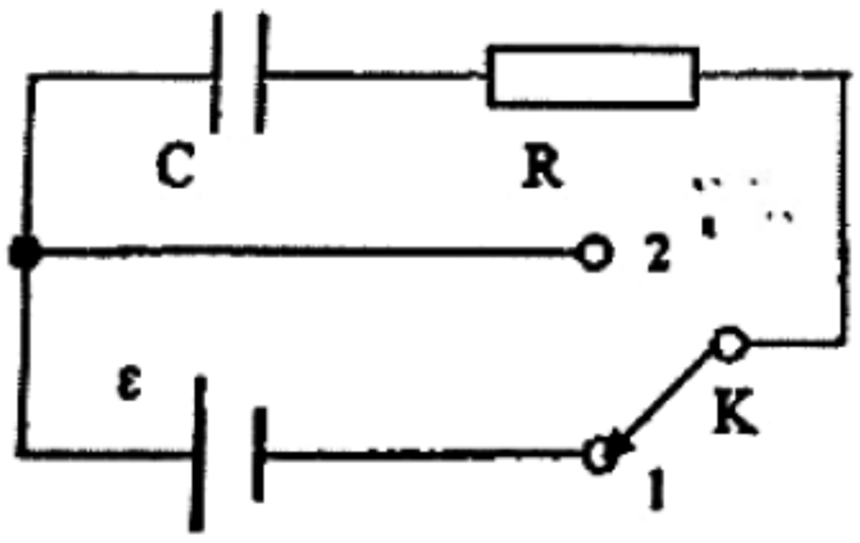


图 1：题五图

六，（15 分）真空中用两根彼此平行的半无限长直导线 L_1，L_2 把半径为 R 的均匀导体圆环连到电源上。已知直导线上的电流为 I，求圆环中心 O 点的磁感应强度。

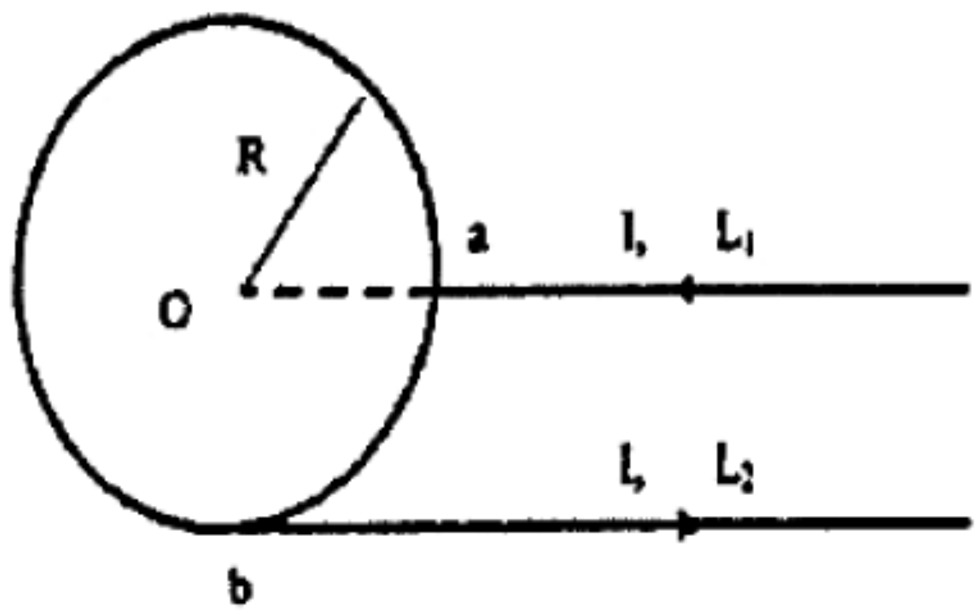


图 2：题六图

量子力学部分（总分 60 分）

一、（15 分）假如把原子核看成是一个半径为10^{-15}米的球方势阱，实验表明势阱深度约为 10 MeV，试利用不确定关系论证：电子不可能存在于原子核内。

二、（15 分）在动量表象内，求坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}_x$ 的本征矢的表达式。

三、（20 分）现有一个电子限制在平面上一半径为 R 的圆环上运动，θ 为其角位置。已知开始时刻该电子的波函数为$\psi(\theta,0)=\sin^2\theta$。试求：

（1）粒子在任意 $t\geq 0$ 时刻的波函数；

（2）任意 $t\geq 0$ 时刻的电子能量期望值。

四、（10 分）质量为 μ 的粒子作一维运动，穿过一个 δ 势垒 $V(x)=g\delta(x)$，$(g>0)$，求透射系数。

上海交通大学

2014 年硕士研究生入学考试试题

试题序号：829 试题名称：电磁学和量子力学

考试时间： 3 小时 满分值： 150 分

（答案必须写在答题纸上，写在试题纸上的一律不给分）

电磁学部分（总分 90 分）

一，（10 分）半径为R的半球面上均匀带电，电荷密度为σ，试求球心处的电场强度。

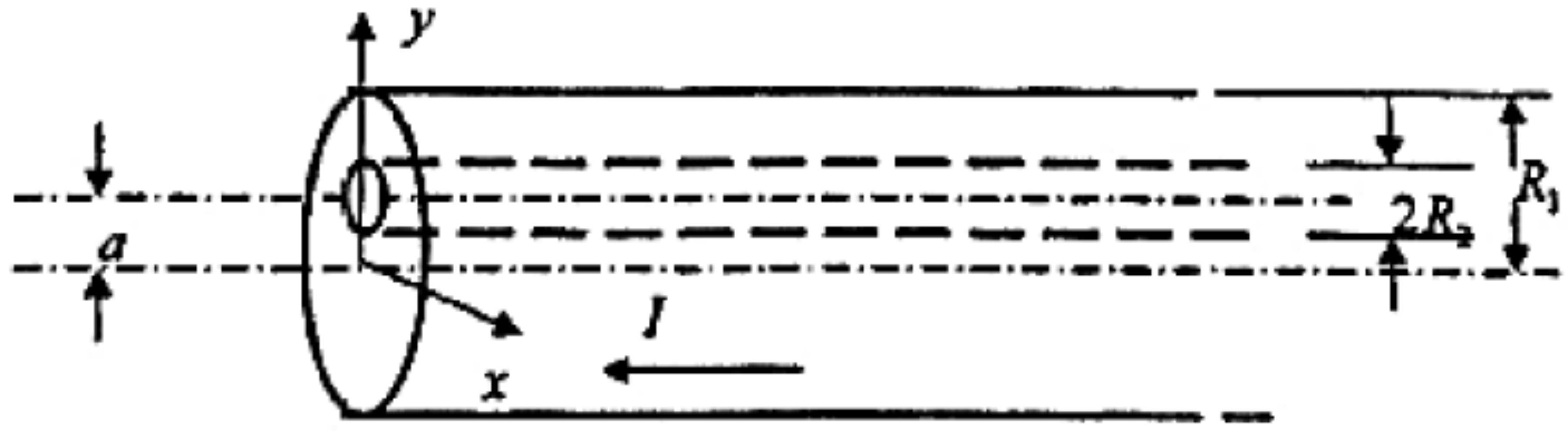
二，（10 分）一半径为a、相对磁导率为μ_r的无限长导体圆柱上流有均匀恒定电流I_0，求任一点的$\overline{H}$和$\overline{B}$，并解释柱外磁场与柱体磁导率值无关的原因。

三，（15 分）半径为R的圆片上均匀带电，电荷面密度为σ_e。令该片以角速度ω绕其轴线旋转，求圆片中心O处的磁感应强度大小。

四，（15 分）试推导两种电介质交界面上电场强度和电位移矢量的边界条件。

五，（20 分）一个理想电阻$R = 200\Omega$和一个理想电容器C串联后接在频率为$f = 50Hz$的交流电源上，测得电阻上的电压为$U_R = 30V$；电容上的电压为$U_C = 40V$，求电源的电压U和电容器的电容量C。

六，（20 分）一根外半径为R_1的无限长圆柱形导体管，管内空心部分的半径为R_2，空心部分与圆柱的轴相平行但不重合，两轴间相距为a，并且$a > R_2$。现有电流I沿导体管流动，电流均匀分布在管的横截面上，而电流方向与管的轴线平行。求管外任意一点的磁场感应强度$\overline{B}$（要求作示意图）。



量子力学部分（总分 60 分）

一、（10 分）用测不准关系估算氦原子基态能量。

二、（10 分）质量为 μ 的粒子作一维运动，穿过一个 δ 势垒 $V(x)=g\delta(x)$，$(g>0)$，求透射系数。

三、（20 分）对于一维谐振子，取基态试探波函数形式为 $\overline{B}$，$\vec{B}$ 为参数。用变分法求基态能量，并与严格解比较。

四、（20 分）一个电子在与磁场 $\overline{B}$（沿 z 轴）垂直的平面内运动，取规范 $\overline{A}=(-By,0,0)$。试求此 2 维问题的哈密顿量和能量本征值。